STUDI DI FUNZIONE

Funzioni razionali intere

Esercizio 1. Studiare la funzione $y = x^3 - 3x$

Soluzione. Dominio $\mathbb{R}$

- Simmetria: $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x)$ funzione dispari (simmetria rispetto all'origine)
- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0; \pm\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

- segno della funzione

$$x(x^2 - 3) > 0 \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3} \end{array}$$

  la funzione è positiva per $-\sqrt{3} < x < 0 \vee x > \sqrt{3}$; è negativa per $x < -\sqrt{3} \vee 0 < x < \sqrt{3}$

- comportamento all'infinito

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x = +\infty$$

  nessun asintoto

- crescenza, decrescenza, massimi e minimi

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \quad x = \pm 1 \ \ \textit{punti stazionari}$$

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & x < -1 \vee x > 1 \\ y' < 0 & -1 < x < 1 \end{array}$$

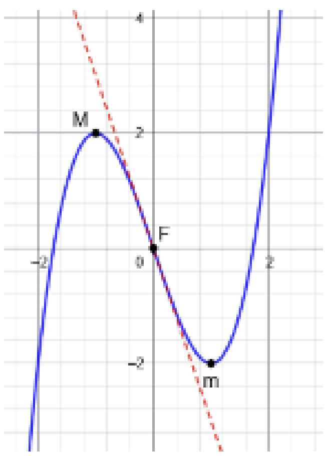
  la funzione ammette una massimo relativo $M(-1; 2)$ e un minimo relativo $m(1; -2)$

- concavità e flessi

$$y" = 6x$$

  la funzione si annulla per $x = 0$, ha concavità verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < 0$; ammette quindi un flesso a tangente obliqua $(y'(0) \neq 0)$ in $F(0; 0)$; l'equazione della tangente in F è $y = -3x$

- grafico



Esercizio 2. Studiare la funzione $y = 2x^4 - 4x^3$

Soluzione. Dominio $\mathbb{R}$

- simmetria: $f(-x) = 2(-x)^4 - 4(-x)^3 = 2x^4 + 4x^3$ la funzione non è né pari né dispari
- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = 2x^4 - 4x^3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x^4 - 4x^3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0; 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

- segno della funzione

$$2x^3(x-2) > 0 \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 2 \end{array}$$

la funzione è positiva per $x < 0 \vee x > 2$; è negativa per $0 < x < 2$; interseca gli assi nei punti $O(0;0)$ e $A(2;0)$.

- comportamento all'infinito

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^4 - 4x^3 = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(2 - \frac{4}{x}\right) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} 2x^4 + 4x^3 = +\infty$$

nessun asintoto

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = 8x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \quad x = 0; 3$$

$$\begin{array}{ccc} y' > 0 & x > 3 & \mathit{crescente} \\ y' < 0 & x < 0 \vee 0 < x < 3 & \mathit{decrescente} \end{array}$$

la funzione ammette un minimo assoluto $m(3;0)$

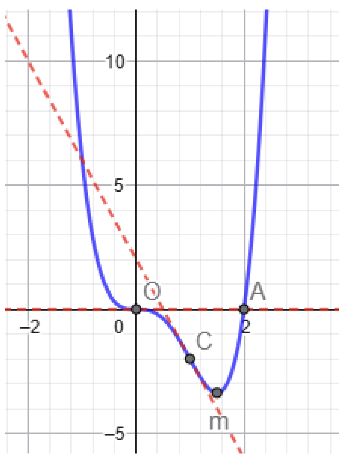
- concavità, flessi

$$y" = 24x^2 - 24x = 24x(x-1) \quad x = 0; 1$$

$$\begin{array}{ccc} y" > 0 & x < 0 \vee x > 1 & \mathit{concavità\ verso\ l'alto} \\ y' < 0 & 0 < x < 1 & \mathit{concavità\ verso\ il\ basso} \end{array}$$

la derivata prima e la derivata seconda si annullano per $x = 0$ e avremo un flesso a tangente orizzontale $F_1(0;0)$ e un flesso a tangente obliqua in $F_2(1;-2)$ di equazione $y = -4x + 2$

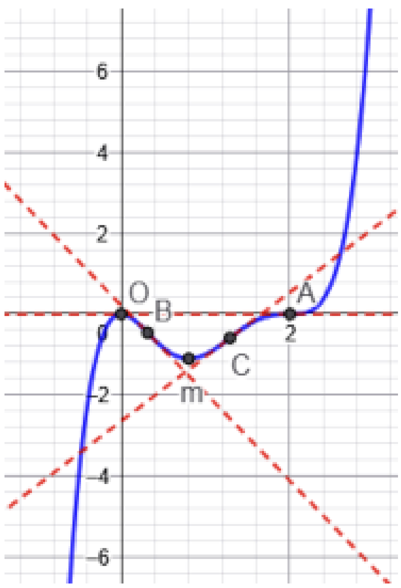
- grafico



Esercizio 3. Studiare la funzione $y = x^2(x-2)^3$

Soluzione. Dominio $\mathbb{R}$

- simmetria: $f(-x) = (-x)^2(-x-2)^3 = -x^2(x+2)^3$ la funzione non è né pari né dispari
- Intersezione con gli assi
$$\begin{cases} y = x^2(x-2)^3 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2(x-2)^3 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0; 2 \\ y = 0 \end{cases}$$
- segno della funzione
$$x^2(x-2)^3 > 0 \qquad \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x > 2 \end{array}$$
la funzione è positiva per $x > 2$; è negativa per $x < 2$ con $x \neq 0$; interseca gli assi nei punti $O(0;0)$ e $A(2;0)$.
- comportamento all'infinito
$$\lim_{x\to-\infty} x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} x^2(x-2)^3 = +\infty$$
nessun asintoto
- crescenza, decrescenza, max, min
$$y' = 2x(x-2)^3 + 3x^2(x-2)^2 = x(x-2)^2(5x-4) = 0 \quad x = 0; 2; \frac{4}{5}$$
$$\begin{array}{lcc} y' > 0 & x < 0 \vee \frac{4}{5} < x < 2 \vee x > 2 & crescente \\ y' < 0 & 0 < x < \frac{4}{5} & decrescente \end{array}$$
la funzione ammette un massimo relativo $M(0;0)$, un minimo relativo $m\left(\frac{4}{5}; -\frac{3456}{3125} \simeq -1,1\right)$; prima e dopo $x = 2$ la derivata non cambia segno, indicando un possibile flesso.
- concavità, flessi
$$y" = (5x^2 - 8x + 2)(x-2) = 0 \quad x = 2; \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$$
$$\begin{array}{lcc} y" > 0 & \frac{4-\sqrt{6}}{5} < x < \frac{4+\sqrt{6}}{5} \vee x > 2 & concavità\ verso\ l'alto \\ y' < 0 & x < \frac{4-\sqrt{6}}{5} \vee \frac{4+\sqrt{6}}{5} < x < 2 & concavità\ verso\ il\ basso \end{array}$$
la derivata prima e la derivata seconda si annullano per $x = 2$ e avremo un flesso a tangente orizzontale $F_1(0;0)$ e due flessi a tangente obliqua in $F_2(0.31; -0.46)$ e $F_3(1.29; -0,6)$di equazione $y = -4x + 2$
- grafico



Esercizio 4. Studiare la funzione $y = x^3 + x^2 + x + 1$

Soluzione. Dominio $\mathbb{R}$

- simmetria: $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) + 1 = -x^3 + x^2 - x + 1$ la funzione non è né pari né dispari

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = x^3 + x^2 + x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = (x+1)(x^2+1) \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

- segno della funzione

$$(x+1)(x^2+1) > 0 \quad \begin{array}{l} \forall x \\ x > -1 \end{array}$$

  la funzione è positiva per $x > -1$; è negativa per $x < -1$; interseca gli assi nei punti $A(0;1)$ e $B(-1;0)$.

- comportamento all'infinito

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + x^2 + x + 1 = \lim_{x \to -\infty} x^{\cdot 3} = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} x^3 + x^2 + x + 1 = +\infty$$

  nessun asintoto

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = 3x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \nexists x$$

$$\begin{array}{ccc} y' > 0 & \forall x \in \mathbb{R} & crescente \\ y' < 0 & mai & decrescente \end{array}$$

  la funzione non ammette né massimo né minimo relativo.

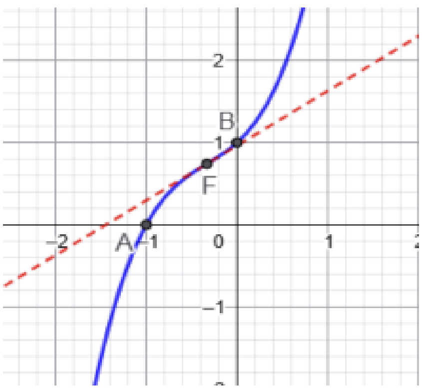
- concavità, flessi

$$y" = 6x + 2 = 0 \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} y" > 0 & x > -\frac{1}{3} & concavit\grave{a}\ verso\ l'alto \\ y' < 0 & x < -\frac{1}{3} & concavit\grave{a}\ verso\ il\ basso \end{array}$$

  avremo un flesso a tangente obliqua in $F\left(-\frac{1}{3}; \frac{20}{27}\right)$di equazione $y = \frac{2}{3}x + \frac{27}{27}$

- grafico



Funzioni razionali fratte

Esercizio 5. Tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = \frac{1}{x^2+3x-4}$$

- Dominio: La funzione esiste per tutti i valori di x che non annullano il denominatore; cioè

  $$x^2+3x-4 \neq 0$$

  l'equazione associata ammette soluzioni per $x_1 = -4$ e $x_2 = 1$ e avremo pertanto

  $$D = \mathbb{R} - \{-1;4\} = (-\infty;-4) \cup (-4;1) \cup (1;+\infty)$$

- simmetrie:

  $$f(-x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$$

  funzione né pari né dispari.

- Intersezioni con gli assi: con l'asse x non ce ne sono, perché il numeratore è una costante e non si annulla; Intersezioni con l'asse y: si ottengono risolvendo il sistema

  $$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{x^2+3x-4} \end{cases} \quad A\left(0;-\frac{1}{4}\right)$$

- segno della funzione: per determinare positività e negatività della funzione, studiamo la disequazione

  $$\frac{1}{x^2+3x-4} > 0$$

  cioè

  $$\begin{array}{ll} N > 0 & \textit{sempre} > 0 \\ D > 0 & x < -4 \vee x > 1 \end{array}$$

  da cui si ottiene

  $$\begin{array}{ll} y > 0 & x < -1 \vee x > 4 \\ y < 0 & -4 < x < 1 \end{array}$$

- comportamento all'infinito: calcoliamo il comportamento della funzione al tendere di x all'infinito

  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2} = 0$$

  in questo caso si ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$, cioè l'asse delle x

- asintoti: calcoliamo il limite nei punti di discontinuità

  $$\begin{array}{rcccl} \lim_{x\to-4^-} \frac{1}{x^2+3x-4} & = & \frac{1}{(x-1)(x+4)} & = & +\infty \\ \lim_{x\to-4^+} \frac{1}{x^2+3x-4} & = & \frac{1}{(x-1)(x+4)} & = & -\infty \\ \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x^2+3x-4} & = & \frac{1}{(x-1)(x+4)} & = & -\infty \\ \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x^2+3x-4} & = & \frac{1}{(x-1)(x+4)} & = & +\infty \end{array}$$

  abbiamo quindi due asintoti verticali, di equazioni $x = -4$ e $x = 1$; non ci sono asintoti obliqui perché per $x \to \infty$ $\frac{f(x)}{x} \to 0$

- crescenza, decrescenza, max, min: calcoliamo la derivata prima e uguagliamola a zero

$$y' = \frac{-2x-3}{\left(x^2+3x-4\right)^2} = 0 \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{lll} y' > 0 & x < -\frac{3}{2}\,(x \neq -4) & crescente \\ y' < 0 & x > -\frac{3}{2}\,(x \neq 1) & decrescente \end{array}$$

avremo un punto di massimo relativo in $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{4}{25}\right)$

- concavità, flessi

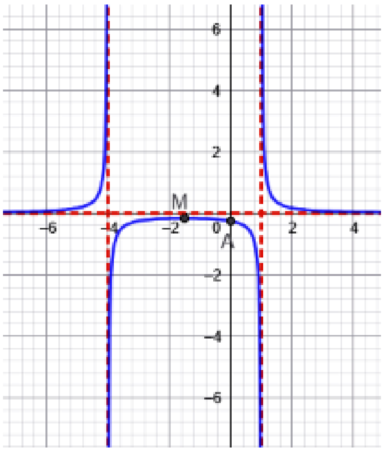
$$y" = \frac{-2\left(x^2+3x-4\right)^2+2\left(x^2+3x-4\right)(2x+3)^2}{\left(x^2+3x-4\right)^4} = \frac{6x^2+18x+26}{\left(x^2+3x-4\right)^3} \qquad \Delta_{num} < 0$$

$$\begin{cases} N > 0 & \forall x \in D \\ D > 0 & x < -4 \vee x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} y" > 0 & x < -4 \vee x > 1 & concavit\grave{a}\ verso\ l'alto \\ y' < 0 & -4 < x < -1 & concavit\grave{a}\ verso\ il\ basso \end{array}$$

nessun flesso.

- grafico



Esercizio 6. Studiare la funzione

$$y = \frac{x^2+1}{x^2+x-2}$$

Soluzione. - Dominio della funzione : $D : x^2 + x - 2 \neq 0$

- le soluzioni dell'equazione associata sono: $x_1 \neq -2$ e $x_2 \neq 1$; pertanto

$$D = \mathbb{R} - \{-2; 1\}$$

Simmetrie:

$$f(-x) = \frac{x^2+1}{x^2-x-2}$$

né pari né dispari

- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = mai \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^2 + 1$ è sempre positivo. Non vi saranno quindi intersezioni con l'asse delle x. Il grafico della funzione interseca l'asse delle y nel punto la funzione $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

- segno della funzione:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x-2} > 0$$

studiamo numeratore e denominatore

$$\begin{aligned} N > 0 &\quad \forall x \in \mathbb{R} \\ D > 0 &\quad x < -2 \vee x > 1 \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} y > 0 &\quad x < -2 \vee x > 1 \\ y < 0 &\quad -2 < x < 1 \end{aligned}$$

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+1}{x^2+x-2} &= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{5}{-3\cdot 0^-} = +\infty \\
\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+1}{x^2+x-2} &= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{5}{-3\cdot 0^+} = -\infty \\
\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2+x-2} &= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3\cdot 0^-} = -\infty \\
\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2+x-2} &= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{-3\cdot 0^+} = +\infty
\end{aligned}$$

vi sono quindi asintoti verticali di equazione $x = -2$ e $x = 1$. Il comportamento della funzione quando x cresce o decresce all'infinito:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

vi è pertanto un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$. Non ci sono asintoti obliqui.

- crescenza, decrescenza, max, min:

$$y' = \frac{2x\left(x^2+x-2\right) - (2x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \frac{x^2-6x-1}{\left(x^2+x-2\right)^2} = 0 \quad x = 3 \pm \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} y' > 0 &\quad x < -2 \vee -2 < x < 3-\sqrt{10} \vee x > 3+\sqrt{10} \quad \textit{crescente} \\ y' < 0 &\quad 3-\sqrt{10} < x < 1 \vee 1 < x < 3+\sqrt{10} \quad \textit{decrescente} \end{aligned}$$

avremo un punto di massimo relativo in $M\left(3-\sqrt{10}; \frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)$ e uno di minimo relativo $m\left(3-\sqrt{10}; \frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)$

- concavità e flessi

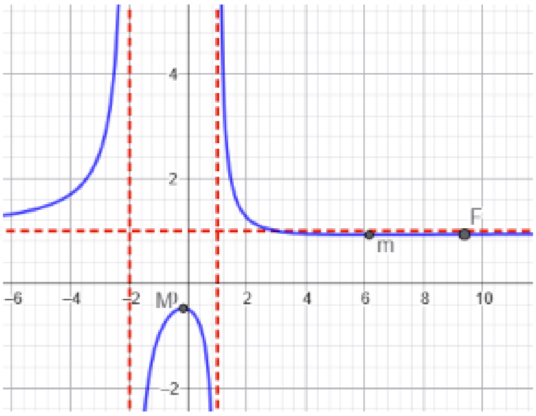
$$y" = \frac{(2x-6)\left(x^2+x-2\right)^2 - 2\left(x^2+x-2\right)(2x+1)\left(x^2-6x-1\right)}{\left(x^2+x-2\right)^4} = \frac{-2\left(x^3-9x^2-3x-7\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3} \quad x \simeq 9.4$$

$$\begin{cases} N > 0 \quad x \gtrsim 9,4 \\ D > 0 \quad x < -2 \vee x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y" > 0 &\quad x < -4 \vee x > 1 \quad \textit{concavità verso l'alto} \\ y' < 0 &\quad -4 < x < -1 \quad \textit{concavità verso il basso} \end{aligned}$$

flesso $F(9,4; 0,9)$

- grafico



Esercizio 7. Studiare la funzione
$$y = \frac{x-2}{x^2}$$

Soluzione. Dominio della funzione : $D : \mathbb{R} - \{0\}$

- Simmetrie:
$$f(-x) = \frac{-x-2}{x^2}$$
né pari né dispari

- Intersezione con gli assi: il valore $x = 0$ non appartiene al dominio, per cui
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$
Non vi saranno quindi intersezioni con l'asse delle y. Il grafico della funzione interseca l'asse delle x nel punto $A(2;0)$

- segno della funzione:
$$\frac{x-2}{x^2} > 0$$
studiamo numeratore e denominatore
$$\begin{array}{ll} N > 0 & x > 2 \\ D > 0 & \forall x \in D \end{array}$$
da cui si ha
$$\begin{array}{ll} y > 0 & x > 2 \\ y < 0 & x < 0 \vee 0 < x < 2 \end{array}$$

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-2}{x^2} = \frac{-2}{0} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{x^2} = \frac{-2}{0} = -\infty$$
vi è quindi un asintoto verticali di equazione $x = 0$. Il comportamento della funzione quando x cresce o decresce all'infinito:
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$
vi è pertanto un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$. Non ci sono asintoti obliqui.

- crescenza, decrescenza, max, min:

$$y' = \frac{x^2 - 2x\,(x-2)}{x^4} = \frac{4-x}{x^3} = 0 \quad x = 4$$

$$\begin{array}{ccc} y' > 0 & 0 < x < 4 & crescente \\ y' < 0 & x < 0 \vee x > 4 & decrescente \end{array}$$

avremo un punto di massimo relativo in $M\left(4; \frac{1}{8}\right)$ ($x = 0$ non appartiene al dominio)

- concavità e flessi

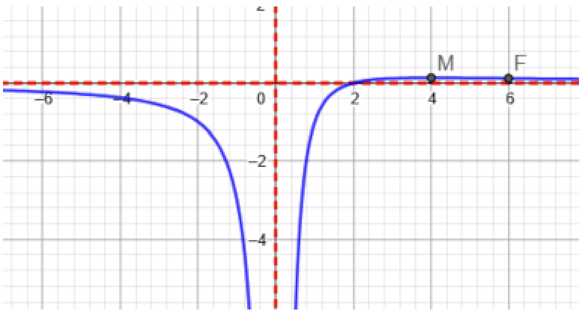
$$y" = \frac{-x^3 - 3x^2(4-x)}{x^6} = \frac{2(x-6)}{x^4} = 0 \qquad x = 6$$

$$\begin{cases} N > 0 & x > 6 \\ D > 0 & \forall \in D \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} y" > 0 & x > 6 & concavit\grave{a}\, verso\, l'alto \\ y' < 0 & x < 0 \vee 0 < x < 6 & concavit\grave{a}\, verso\, il\, basso \end{array}$$

flesso $F\left(6; \frac{1}{9}\right)$

- grafico



Esercizio 8. Studiare la funzione

$$y = \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^4}$$

Soluzione. Dominio della funzione : $D : \mathbb{R} - \{0\}$

- Simmetrie:

$$f(-x) = \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^4} = f(x)$$

funzione pari

- Intersezione con gli assi: il valore $x = 0$ non appartiene al dominio, per cui

$$\begin{cases} x^4 + x^2 - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = -2; 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Non vi saranno quindi intersezioni con l'asse delle y. Il grafico della funzione interseca l'asse delle x nei punti $A(-1; 0)$ e $B(1; 0)$.

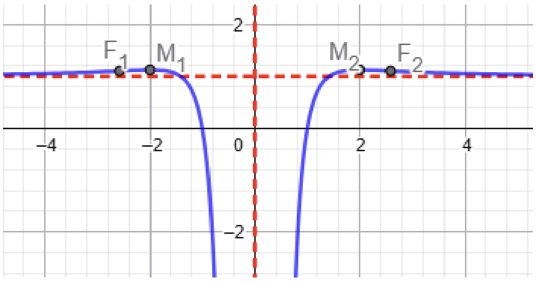
- segno della funzione:
$$\frac{x^4+x^2-2}{x^4}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)}{x^4}>0$$
studiamo numeratore e denominatore
$$\begin{aligned} N>0 &\quad x<-1 \vee x>1 \\ D>0 &\quad \forall x \in D \end{aligned}$$
da cui si ha
$$\begin{aligned} y>0 &\quad x<-1 \vee x>1 \\ y<0 &\quad -1 x x<0 \vee 0<x<1 \end{aligned}$$

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4+x^2-2}{x^4}=\frac{-2}{0}=-\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4+x^2-2}{x^4}=\frac{-2}{0}=-\infty$$
vi è quindi un asintoto verticali di equazione $x=0$. Il comportamento della funzione quando x cresce o decresce all'infinito:
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^4+x^2-2}{x^4}=\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^4}{x^4}=1$$
vi è pertanto un asintoto orizzontale di equazione $y=1$. Non ci sono asintoti obliqui.

- crescenza, decrescenza, max, min:
$$y'=\frac{\left(4 x^3+2 x\right) x^4-4 x^3\left(x^4+x^2-2\right)}{x^8}=\frac{8-2 x^2}{x^5}=0 \quad x=\pm 2$$
$$\begin{aligned} N>0 &\quad x<-2 \vee 0<x<2 \\ D>0 &\quad x>0 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y'>0 &\quad x<-2 \vee 0<x<2 \quad \textit{crescente} \\ y'<0 &\quad -2<x<0 \vee x>2 \quad \textit{decrescente} \end{aligned}$$
avremo due punti di massimo relativo in $M_1\left(-2; \frac{9}{8}\right)$ e il suo simmetrico $M_1\left(2; \frac{9}{8}\right)$; $x=0$ non appartiene al dominio)

- concavità e flessi
$$y"=\frac{-4 x^6-5 x^4\left(8-2 x^2\right)}{x^6}=\frac{6 x^2-40}{x^6}=0 \qquad x=\pm 2 \sqrt{\frac{5}{3}}$$
$$\begin{aligned} N>0 &\quad -2 \sqrt{\frac{5}{3}}<x<0 \vee 0<x<2 \sqrt{\frac{5}{3}} \\ D>0 &\quad \forall \in D \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y">0 &\quad -2 \sqrt{\frac{5}{3}}<x<0 \vee 0<x<2 \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \textit{concavità verso l'alto} \\ y'<0 &\quad x<-2 \sqrt{\frac{5}{3}} \vee x>-2 \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \textit{concavità verso il basso} \end{aligned}$$
due flessi $F_1\left(-2 \sqrt{\frac{5}{3}}; \frac{221}{200}\right)$ e $F_2\left(2 \sqrt{\frac{5}{3}}; \frac{221}{200}\right)$

- grafico



Esercizio 9. Studiare la funzione

$$y = \frac{2x-5}{x^2-4}$$

Soluzione. Dominio della funzione : $D : \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

- Simmetrie:

$$f(-x) = \frac{-2x-5}{x^2-4}$$

funzione né pari né dispari

- Intersezione con gli assi: il valore $x = 0$ non appartiene al dominio, per cui

$$\begin{cases} \frac{2x-5}{x^2-4} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x-5}{x^2-4} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Il grafico della funzione interseca l'asse delle x nel punto $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ e l'asse delle y nel punto $B\left(0; \frac{5}{4}\right)$.

- segno della funzione:

$$\frac{2x-5}{x^2-4} > 0$$

studiamo numeratore e denominatore

$$\begin{array}{cc} N > 0 & x > \frac{5}{2} \\ D > 0 & x < -2 \vee x > 2 \end{array}$$

da cui si ha

$$\begin{array}{cc} y > 0 & -2 < x < 2 \vee x > \frac{5}{2} \\ y < 0 & x < -2 \vee 2 < x < \frac{5}{2} \end{array}$$

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2x-5}{x^2-4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{2x-5}{x^2-4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x-5}{x^2-4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{2x-5}{x^2-4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

vi sono quindi due asintoti verticali di equazione $x = \pm 2$. Il comportamento della funzione quando x cresce o decresce all'infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-5}{x^2-4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

vi è pertanto un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$. Non ci sono asintoti obliqui.

- crescenza, decrescenza, max, min:

$$y' = \frac{2\left(x^2-4\right) - 2x\left(2x-5\right)}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-2x^2+10x-8}{\left(x^2-4\right)^2} = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 4$$

$$\begin{array}{cc} N > 0 & 1 < x < 4 \\ D > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y' > 0 & 1 < x < 2 \vee 2 < x < 4 & \textit{crescente} \\ y' < 0 & x < -2 \vee -2 < x < 1 \vee x > 4 & \textit{decrescente} \end{array}$$

avremo un punto di massimo relativo in $M\left(4; \frac{1}{4}\right)$ e un punto di minimo $m\left(1; 1\right)$

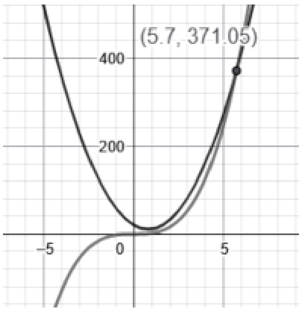
- concavità e flessi

$$y" = \frac{(-4x+10)\left(x^2-4\right)^2 - 4x\left(x^2-4\right)\left(-2x^2+10x-8\right)}{\left(x^2-4\right)^4} = \frac{2\left(2x^3-15x^2+24x-20\right)}{\left(x^2-4\right)^3} = 0$$

risolviamo l'equazione al numeratore in forma approssimata con il metodo grafico, ponendo

$$\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 15x^2 - 24x + 20 \end{cases}$$

rappresentiamo graficamente le due funzioni e analizziamo la loro intersezione



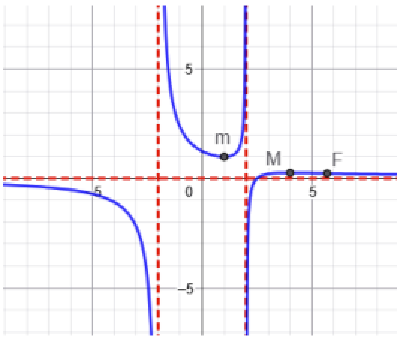
le due curve si intersecano in un solo punto di coordinate (approssimando) $(5,7;371)$, per cui la derivata seconda avrà

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x > 5,7 \\ D > 0 & x < -2 \vee x > 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y" > 0 & -2 < x < 2 \vee x > 5,7 & concavità\ verso\ l'alto \\ y" < 0 & x < -2 \vee 2 < x < 5,7 & concavità\ verso\ il\ basso \end{array}$$

avremo un flesso di ascissa $x_F = 5,7$

grafico



Esercizio 10. Studiare la funzione

$$y = \frac{4x\,(x-1)^2}{(2x-3)^2}$$

Soluzione. Dominio della funzione : $D : \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

- Simmetrie:

$$f(-x) = \frac{-4x\,(-x-1)^2}{(-2x-3)^2}$$

funzione né pari né dispari

- Intersezione con gli assi: il valore $x=0$ non appartiene al dominio, per cui

$$\begin{cases} \frac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=1 \ x_2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Il grafico della funzione interseca gli assi nell'origine $O(0;0)$ e l'asse delle x nel punto $B(1;0)$.

- segno della funzione:

$$\frac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}>0$$

studiamo numeratore e denominatore

$$\begin{array}{ll} N>0 & 0<x<1 \vee 1<x<\frac{3}{2} \vee x>\frac{3}{2} \\ D>0 & \forall x \in D \end{array}$$

da cui si ha

$$\begin{array}{ll} y>0 & 0<x<1 \vee 1<x<\frac{3}{2} \vee x>\frac{3}{2} \\ y<0 & x<0 \end{array}$$

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} \frac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to\frac{3}{2}^+} \frac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{0^+}=+\infty$$

asintoto verticale di equazione $x=\frac{3}{2}$. Il comportamento della funzione quando x cresce o decresce all'infinito:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}=\lim_{x\to\pm\infty} 4x=\pm\infty$$

non vi è asintoto orizzontale, ma essendo uguale a 1 la differenza tra i gradi del numeratore e denominatore, verifichiamo la presenza di un asintoto obliquo.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x(x-1)^2}{x(2x-3)^2}=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3}{4x^3}=1 \quad q=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}-x=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{(2x-3)^2}=1$$

abbiamo un asintoto obliquo di equazione $y=x+1$

- crescenza, decrescenza, max, min:

$$y'=\frac{\left[4(x-1)^2+8x(x-1)\right](2x-3)^2-16x(2x-3)(x-1)^2}{(2x-3)^4}=$$

$$\frac{4(x-1)\left(2x^2-7x+3\right)}{(2x-3)^3}=0 \quad x_1=1 \quad x_2=\frac{1}{2} \quad x_3=3$$

$$\begin{array}{ll} N>0 & \frac{1}{2}<x<1 \vee x>3 \\ D>0 & \forall x \in D \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y'>0 & \frac{1}{2}<x<1 \vee x>3 & crescente \\ y'<0 & x<\frac{1}{2} \vee 1<x<\frac{3}{2} \vee \frac{3}{2}<x<3 & decrescente \end{array}$$

avremo un punto di massimo relativo in $M(1;0)$ e un punto di minimo $m_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)$ e $m_2\left(3;\frac{16}{3}\right)$

- concavità e flessi

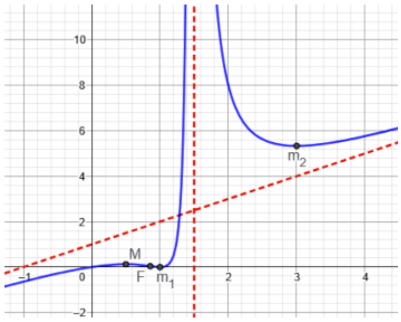
$$y"=\frac{\left[4\left(2x^2-7x+3\right)+(4x-4)(4x-7)\right](2x-3)-6(4x-4)\left(2x^2-7x+3\right)}{(2x-3)^4}=\frac{8(7x-6)}{(2x-3)^4}=0$$

la derivata seconda si annulla per $x=\frac{6}{7}$ e avremo

$$\begin{array}{ll} N>0 & x>\frac{6}{7} \\ D>0 & \forall x \in D \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y">0 & \frac{6}{7}<x<\frac{3}{2} \vee x>\frac{3}{2} & concavità\ verso\ l'alto \\ y"<0 & x<\frac{6}{7} & concavità\ verso\ il\ basso \end{array}$$

avremo un flesso $F\left(\frac{6}{7};\frac{8}{189}\right)$
grafico



Esercizio 11. Studiare la funzione

$$y=\frac{x^2+x-2}{x-2}$$

Soluzione. Dominio della funzione : $D:\mathbb{R}-\{2\}$

- Simmetrie:
$$f(-x)=\frac{x^2-x-2}{-(x+2)}$$
funzione né pari né dispari

- Intersezione con gli assi: il valore $x=0$ non appartiene al dominio, per cui
$$\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x-2}=0\\ x=0\end{cases}\quad\begin{cases}y=1\\ x=0\end{cases}\quad\begin{cases}x^2+x-2=0\\ y=0\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=-2\ x_2=1\\ y=0\end{cases}$$
Il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $A(0;1)$ e l'asse delle x nei punti $B(-2;0)$ e $C(1;0)$.

- segno della funzione:
$$\frac{x^2+x-2}{x-2}>0$$
studiamo numeratore e denominatore
$$\begin{array}{ll}N>0 & x<-2\vee x>1\\ D>0 & x>2\end{array}$$
da cui si ha
$$\begin{array}{ll}y>0 & -2<x<1\vee x>2\\ y<0 & x<-2\vee 1<x<2\end{array}$$

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità
$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+x-2}{x-2}=\frac{4}{0^-}=-\infty\qquad\lim_{x\to2^+}\frac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
asintoto verticale di equazione $x=2$. Il comportamento della funzione quando x cresce o decresce all'infinito:
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-2}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$
non vi è asintoto orizzontale, ma essendo uguale a 1 la differenza tra i gradi del numeratore e denominatore, verifichiamo la presenza di un asintoto obliquo.
$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\quad q=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-2}{x-2}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-2}{x-2}=3$$
abbiamo un asintoto obliquo di equazione $y=x+3$

- crescenza, decrescenza, max, min:

$$y' = \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

$$\begin{array}{cc} N > 0 & x < 0 \vee x > 4 \\ D > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y' > 0 & x < 0 \vee x > 4 & crescente \\ y' < 0 & 0 < x < 2 \vee 2 < x < 4 & decrescente \end{array}$$

  avremo un punto di massimo relativo in $M(0;1)$ e un punto di minimo $m(4;9)$

- concavità e flessi

$$y" = \frac{2(x^2-2)^3 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3} = 0$$

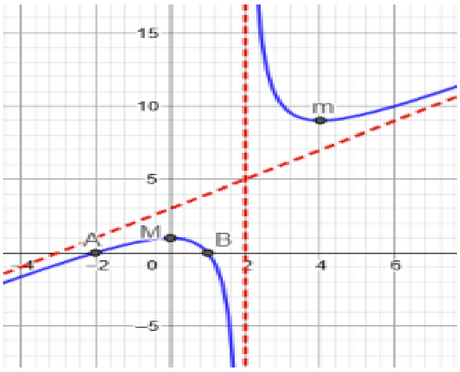
  segno della derivata seconda

$$\begin{array}{cc} N > 0 & \forall x \in D \\ D > 0 & x > 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y" > 0 & x > 2 & concavità\ verso\ l'alto \\ y" < 0 & x < 2 & concavità\ verso\ il\ basso \end{array}$$

  non avremo flesso perché la funzione in $x = 2$ non è definita

- grafico



Esercizio 12. Studiare la funzione

$$y = \frac{|x^2-5x+6|}{x^2+2}$$

Soluzione. Dominio della funzione : il denominatore è sempre positivo per cui $D : \mathbb{R}$

- la funzione contiene il valore assoluto del numeratore per cui, dalla disuguaglianza

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \quad x < 2 \vee x > 3$$

  la funzione risulta così definita

$$y = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2+2} & x \le 2 \vee x \ge 3 \\ -\frac{x^2-5x+6}{x^2+2} & 2 < x < 3 \end{cases}$$

- Intersezione con gli assi: il valore $x = 0$ non appartiene al dominio, per cui

$$\begin{cases} \frac{\left|x^2-5x+6\right|}{x^2+2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \ x_2 = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

  Il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $A\,(0;3)$ e l'asse delle x nei punti $B\,(2;0)$ e $C\,(3;0)$.

- segno della funzione: la funzione sarà sempre positiva essendo maggiori di zero sia il numeratore che il denominatore

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left|x^2-5x+6\right|}{x^2+2} = 1$$

  vi è asintoto orizzontale di equazione $y = 1$

- crescenza, decrescenza, max, min: calcoliamo la derivata nell'intervallo $x < 2$

$$y' = \frac{(2x-5)\left(x^2+2\right) - 2x\left(x^2-5x+6\right)}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{5x^2-8x-10}{\left(x^2+2\right)^2}$$

  studiamo il segno

$$5x^2 - 8x - 10 > 0 \quad x < \frac{4-\sqrt{66}}{5} \vee x > \frac{4+\sqrt{66}}{5}$$

  da cui

$$\begin{array}{lcc} y' > 0 & x < \frac{4-\sqrt{66}}{5} & \textit{crescente} \\ y' < 0 & \frac{4-\sqrt{66}}{5} < x < 2 & \textit{decrescente} \end{array}$$

  calcoliamo la derivata nell'intervallo $2 < x < 3$

$$y' = \frac{-5x^2+8x+10}{\left(x^2+2\right)^2}$$

  studiamo il segno

$$-5x^2 + 8x + 10 > 0 \quad \frac{4-\sqrt{66}}{5} < x < \frac{4+\sqrt{66}}{5}$$

  da cui

$$\begin{array}{lcc} y' > 0 & 2 < x < \frac{4+\sqrt{66}}{5} & \textit{crescente} \\ y' < 0 & \frac{4+\sqrt{66}}{5} < x < 3 & \textit{decrescente} \end{array}$$

  calcoliamo la derivata nell'intervallo $x > 3$

$$y' = \frac{5x^2-8x-10}{\left(x^2+2\right)^2}$$

  studiamo il segno

$$5x^2 - 8x - 10 > 0 \quad x < \frac{4-\sqrt{66}}{5} \vee x > \frac{4+\sqrt{66}}{5}$$

  da cui

$$y' > 0 \quad x > 3 \quad \textit{crescente}$$

  si ha quindi un massimo relativo nel punto $M\left(\frac{4-\sqrt{66}}{5};4,03\right)$; la funzione si annulla in $x = 2$ e $x = 3$ e avremo quindi due punti di cuspide

- concavità e flessi: intervallo $x < 2$

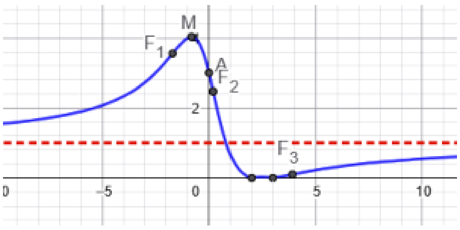
$$y\text{''} = \frac{(10x-8)\left(x^2+2\right) - 4x\left(5x^2-8x-10\right)}{(x-2)^3} = \frac{-2\left(5x^3-12x^2-30x+8\right)}{(x-2)^3} = 0$$

risolvendo graficamente si ottengono i valori approssimati, $x_1 = -1,7$, $x_2 = 0,2$, $x = 3,9$. Nell'intervallo indicato il denominatore è sempre negativo segno della derivata seconda

$$\begin{array}{lll} y" > 0 & x - 1,7 \vee 0,2 < x < 2 & concavità\, verso\, l'alto \\ y" < 0 & -1,7 < x < 0,2 & concavità\, verso\, il\, basso \end{array}$$

flesso $F_1(1,7;3,6)$ e $F_2(0,2;2,5)$. Nell'intervallo $x > 3$ la funzione è concava verso l'alto in $3 < x < 3,9$ e verso il basso per $x > 3,9$. Nell'intervallo $2 < x < 3$ la concavità è sempre verso il basso

- grafico



Esercizio 13. Studiare la funzione

$$y = 2 - \left|x^3 - x\right|$$

Soluzione. Dominio: la funzione è polinomiale intera e il dominio è comunque $D = \mathbb{R}$. Studiamo gli intervalli di positività dell'argomento del valore assoluto

$$x^3 - x > 0 \quad x\left(x^2 - 1\right) > 0 \quad -1 < x < 0 \vee x > 1$$

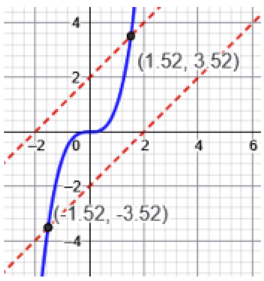
la funzione si può dividere in

$$\begin{array}{ll} y_1 = -x^3 + x + 2 & -1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ y_2 = x^3 - x + 2 & x < -1 \vee 0 < x < 1 \end{array}$$

- la funzione è pari
- intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = 2 - |x^3 - x| \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x^3 - x| = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

risolviamo graficamente trovando l'intersezione tra la funzione $y = x^3$ e la $y = x \pm 2$ e indichiamo la soluzione approssimata



la funzione interseca gli assi in $A(0;2)$, $B(1,52;3,52)$, $C(-1,52;-3,52)$

- segno della funzione: tenendo presente la soluzione del polinomio di 3° grado si ha nel primo caso

$$x^3-x-2<0 \quad x<1,52$$

nel secondo caso

$$x^3-x+2>0 \quad x>-1,52$$

troviamo la soluzione comune

$$\begin{cases} x<1,52 \\ x>-1,52 \end{cases} \quad -1,52<x<1,52$$

la funzione sarà quindi positiva per $-1,52<x<1,52$ e negativa per $x<-1,52 \vee x>1,52$

- comportamento all'infinito

$$\lim_{x\to+\infty} 2-x^3+x=-\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^3-x-2=-\infty$$

nessun asintoto orizzontale né obliquo

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$\begin{cases} y_1'=-\left(3x^2-1\right)=0 \\ y_2'=3x^2-1=0 \end{cases} \quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{ll} 3x^2-1<0 & -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 3x^2+1>0 & x<-\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x>\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

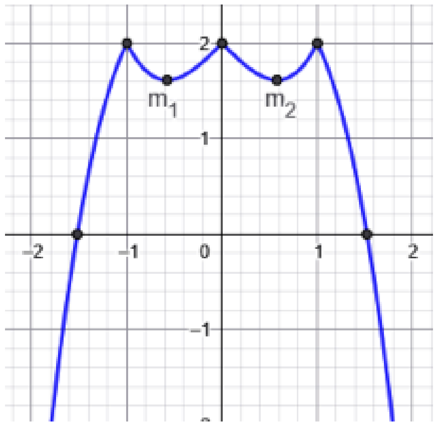
la funzione non è derivabile nei punti $-1,0,1$ perché cambia segno il polinomio argomento del valore assoluto; in questi punti avremo delle cuspidi; descriviamo il segno della funzione nei diversi intervalli

$x<-1$	$3x^2-1>0$	$y'>0$
$-1<x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-3x^2+1<0$	$y'<0$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<0$	$-3x^2+1>0$	$y'>0$
$0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$	$3x^2-1<0$	$y'<0$
$\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1$	$3x^2-1>0$	$y'>0$
$x>1$	$-3x^2+1<0$	$y'<0$

avremo quindi tre massimi nelle cuspidi e due minimi in $m_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3\sqrt{3}}\right)$ e nel suo simmetrico $m_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3\sqrt{3}}\right)$

- concavità, convessità, flessi

$x<-1$	$6x$	<0	concavità verso il basso
$-1<x<0$	$-6x$	>0	concavità verso l'alto
$0<x<1$	$6x$	>0	concavità verso l'alto
$x>1$	$-6x$	<0	concavità verso il basso

nei punti $x=-1,0,1$ non vi è derivata e non ci sono punti di flessi grafico 

Funzioni irrazionali

Esercizio 14. Tracciare il grafico γ della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

Soluzione Dominio: il radicando dovrà essere non negativo, il denominatore diverso da zero. Ciò si esprime:

$$D \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \quad x \geq 0$$

oppure $D : [0;+\infty)$

- intersezione con gli assi: per $x = 0$ si ha $y = 0$. Pertanto la funzione interseca gli assi nell'origine $O(0;0)$.

- segno della funzione: si deve studiare la disequazione $\frac{\sqrt{x}}{1+x} > 0$

$$\begin{array}{lll} N > 0 & \sqrt{x} > 0 & \forall x \in D \\ D > 0 & 1+x > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

  si ricava che la funzione è sempre positiva.

- comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \frac{\sqrt{x}}{x\left(\frac{1}{x}+1\right)} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0$$

  l'asse x rappresenta quindi un asintoto orizzontale. Non esistono asintoti obliqui.

- crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi: calcolo la derivata prima secondo la formula della derivata di un quoziente, cioè $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'} = \frac{f^{'}(x)g(x)-f(x)g^{'}(x)}{g^2(x)}$

$$y^{'} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+x) - \sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1+x-2x}{2\sqrt{x}}}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

  la derivata esiste sempre nel dominio. Si avrà

$$y^{'} > 0 \begin{array}{ll} N > 0 & x < 1 \\ D > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

  La funzione y avrà quindi un massimo per $x = 1$ nel punto $M(1; \frac{1}{2})$

- concavità della funzione e ricerca di eventuali flessi: calcolo la derivata seconda,

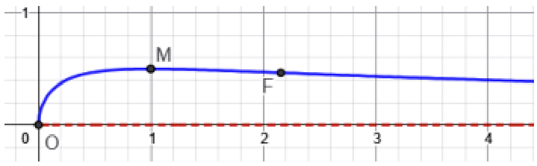
$$y'' = \frac{-2\sqrt{x}(1+x)^2-(1-x)\left[\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}+4\sqrt{x}(1+x)\right]\sqrt{x}}{4x(1+x)^4} = \frac{3x^2-6x-1}{4x\sqrt{x}(1+x)^3}$$

la derivata è sempre definita nel D.; studiamo il segno della derivata seconda negli intervalli compresi nel dominio; si avrà quindi

$$y''>0 \quad \begin{array}{ll} N>0 & x>\frac{3+2\sqrt{3}}{3} \\ D>0 & \forall x\in D \end{array}$$

La funzione presenta quindi un flesso per $x=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ nel punto $F(\frac{3+2\sqrt{3}}{3};\simeq 0,46)$

- grafico



Esercizio 15. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico:

$$y=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$$

- dominio:

$$\begin{cases} x^4+1\geq 0 & \forall x\in\mathbb{R} \\ Den\neq 0 & x\neq 0 \end{cases}$$

si ha quindi $D:\forall x\in\mathbb{R}_0$ oppure $(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$.

- **intersezioni con gli assi**: poiché il numeratore è sempre positivo e il denominatore non si annulla nel dominio, la funzione non avrà alcuna intersezione con gli assi cartesiani.

- **segno della funzione**: studio la disequazione fratta:

$$\begin{array}{lll} N>0 & \sqrt{x^4+1}>0 & \forall x\in D \\ D>0 & x>0 & \end{array}$$

si avrà pertanto

$$\begin{array}{lll} y>0 & per & x>0 \\ y<0 & per & x<0 \end{array}$$

- **eventuali asintoti orizzontali, verticali ed obliqui**:

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x}=\mp\infty$$

non esiste alcuna asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{0^+}=+\infty$$

asintoto verticale di equazione $x=0$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=1 \quad q=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}-x=0$$

si ha quindi un asintoto obliquo di equazione $y=x$, bisettrice del 1° e 3° quadrante.

- **Massimi e minimi relativi**: calcoliamo la derivata prima e ne studiamo il segno per valutare i tratti in cui la funzione è crescente o decrescente. In questo caso si utilizza la formula della derivata di un quoziente, se $y=\frac{f(x)}{g(x)}$, allora $y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$

$$y'=\frac{\frac{4x^3\cdot x}{2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{x^4+1}}{x^2}=\frac{4x^4-2\left(x^4+1\right)}{2x^2\sqrt{x^4+1}}=\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}$$

dominio della derivata $\mathbb{R}_0$. Studiamo il segno della derivata:

$$\begin{array}{lll} N>0 & \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)>0 & x<-1\; x>1 \\ D>0 & & \forall x\in D \end{array}$$

per cui

$$\begin{array}{lll} y'>0 & x<-1\; x>1 & \textit{crescente} \\ y'<0 & -1<x<1 & \textit{decrescente} \end{array}$$

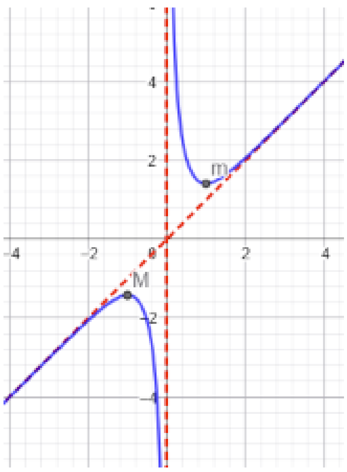
si ha pertanto un massimo relativo nel punto $M\left(-1;-\sqrt{2}\right)$ e un minimo relativo nel punto $m\left(1;\sqrt{2}\right)$

- Calcoliamo ora le eventuali variazioni di concavità per valutare l'esistenza di flessi:

$$y"=\frac{4x^5\sqrt{x^4+1}-\left(\frac{4x^5+2x}{\sqrt{x^4+1}}\right)\left(x^4-1\right)}{x^4\left(x^4+1\right)}=\frac{4x^5\left(x^4+1\right)-\left(4x^5+2x\right)\left(x^4-1\right)}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}}=\frac{6x^4+2}{x^3\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}}$$

la derivata seconda non è mai nulla.

- Riassumendo tutte le informazioni, possiamo disegnare il grafico della funzione, nel modo seguente:



Esercizio 16. Studiare la funzione

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

Soluzione. Dominio:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 4 \end{cases} \quad 0\leq x<4\vee x>4$$

- intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} mai \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

il grafico interseca l'asse x nel punto $A\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

- segno della funzione

$$\begin{array}{lll} N > 0 & \sqrt{x} > -1 & \forall x \in D \\ D > 0 & \sqrt{x} > 2 & x > 4 \end{array}$$

da cui si ha

$$\begin{array}{ll} y > 0 & x > 4 \\ y < 0 & 0 < x < 4 \end{array}$$

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

asintoto verticale di equazione $x = 4$. Il comportamento della funzione quando x cresce o decresce all'infinito:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = 1 = \lim_{x\to +\infty} 4x = 1$$

asintoto orizzontale di equazione $y = 1$; nessun asintoto obliquo.

- crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi:

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)^2} = \frac{-3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2} = 0$$

la derivata esiste sempre nel dominio. Si avrà

$$\begin{array}{ll} N > 0 & mai \\ D > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & mai \\ y' < 0 & \forall x \in D - \{0\} \end{array} \quad decrescente$$

La funzione ha un massimo relativo per $x = 0$ nel punto $M(0;-\frac{1}{2})$

- concavità della funzione e ricerca di eventuali flessi: calcolo la derivata seconda eseguendo il calcolo al denominatore che diventa $2x\sqrt{x} - 8x + 8\sqrt{x}$

$$y" = \frac{3\left(2\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} - 8 + \frac{8}{2\sqrt{x}}\right)}{\left[2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2\right]^2} = \frac{3(3x - 8\sqrt{x} + 4)}{4x\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^4}$$

la derivata seconda si annulla quando

$$3x - 8\sqrt{x} + 4 = 0$$

ponendo $t = \sqrt{x}$, si ottiene $3t^2 - 8t + 4 = 0$, cioè $t_1 = \frac{2}{3}$ e $t_2 = 2$, da cui

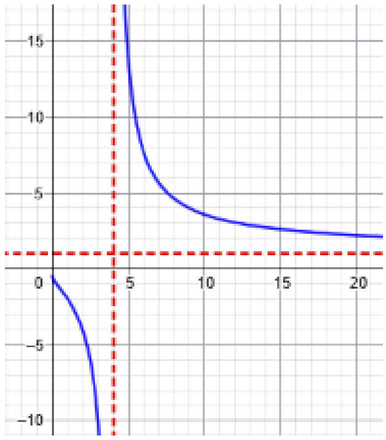
$$x = \frac{4}{9} \quad x = 4 \; non\ accettabile$$

studiamo il segno della derivata seconda dove il denominatore è sempre positivo nel $D - \{0\}$; negli intervalli compresi nel dominio; si avrà quindi

$$y'' > 0 \;\; 0 < x < \frac{4}{9} \vee x > 4$$

La funzione presenta quindi un flesso nel punto $F\left(\frac{4}{9};-\frac{5}{4}\right)$

- grafico



Esercizio 17. Studiare la funzione

$$y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}$$

Soluzione. Dominio: il radicando deve essere positivo o nullo

$$\begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ x > 2 \end{cases} \qquad -1 \le x \le 1 \vee x > 2 \quad [-1;1] \cup]2;+\infty[$$

- intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

  il grafico interseca l'asse x nel punto $A\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$

- segno della funzione: sempre positiva o nulla
- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità

$$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} = \sqrt{\frac{3}{0^+}} = +\infty$$

  asintoto verticale destro di equazione $x = 2$. Il comportamento della funzione quando x cresce o decresce all'infinito:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} = +\infty$$

  nessun asintoto orizzontale né asintoto obliquo.

- crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi:

$$y' = \frac{\frac{2x(x-2)-x\left(x^2-1\right)}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} = \frac{x^2-4x+1}{2(x-2)^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}}$$

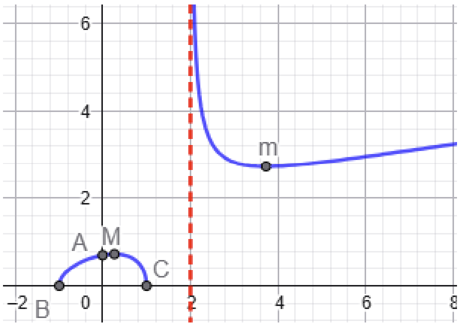
  la derivata esiste sempre nel dominio. Si avrà

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x < 2-\sqrt{3} \vee x > 2+\sqrt{3} \\ D > 0 & \qquad \forall x \in D \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y'>0 & -1<x<2-\sqrt{3} \vee x>2+\sqrt{3} & crescente \\ y'<0 & 2-\sqrt{3}<x<1 \vee 2<x<2+\sqrt{3} & decrescente \end{array}$$

La funzione ha un massimo relativo nel punto $M\left(2-\sqrt{3};\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)$ e un minimo relativo nel punto $m\left(2+\sqrt{3};\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)$

- concavità della funzione e ricerca di eventuali flessi: trascuriamo il calcolo
- grafico



Esercizio 18. Studiare la funzione

$$y=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Soluzione. Dominio: il radicando è la somma di due quadrati, per cui le radici sono sempre positive e si ha $D=\mathbb{R}$

- intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=mai \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

il grafico interseca l'asse y nel punto $A(0;1)$

- segno della funzione:

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>0$$

il denominatore è sempre positivo, il numeratore

$$x+\sqrt{x^2+1}>0 \quad x^2+1>x^2 \quad \forall x$$

la funzione è quindi sempre positiva.

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1=\frac{x}{x}+1=2 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{-|x|}{\sqrt{x^2+1}}+1=-1+1=0$$

asintoto orizzontale destro $y=2$ e asintoto orizzontale sinistro $y=0$.

- crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi:

$$y' = \frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(x+1)}$$

la derivata è sempre positiva e la funzione sempre crescente e non ci sarà né massimo né minimo relativo.

- concavità della funzione e ricerca di eventuali flessi:

$$y" = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right) - 2x\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{-3x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)^2}$$

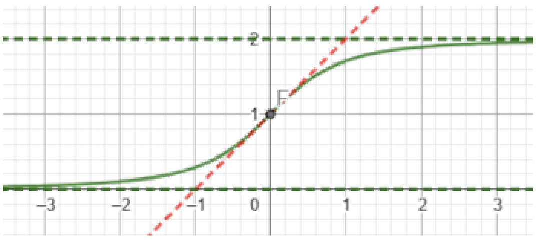
la derivata seconda si annulla per $x=0$ e si ha

$$\begin{array}{lll} y">0 & x<0 & concavit\grave{a}\,verso\,l'alto \\ y"<0 & x>0 & concavit\grave{a}\,verso\,il\,basso \end{array}$$

la funzione ammette un flesso $F(0;1)$ con tangente obliqua di equazione

$$y-y_0 = y'(x-x_0) \quad y-1=1x \quad y=x+1$$

- grafico



Esercizio 19. Studiare la funzione

$$y=\sqrt[3]{(x+4)^2}-2$$

Soluzione. Dominio: la radice è sempre definita e si ha $D=\mathbb{R}$

- intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{(x+4)^2}=2 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4\pm 2\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt[3]{(x+4)^2}-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

il grafico interseca l'asse y nei punti $A\left(-4-2\sqrt{2};0\right)$, $B\left(-4+2\sqrt{2};0\right)$, $C\left(0;2\sqrt[3]{2}\right)$

- segno della funzione:

$$\sqrt[3]{(x+4)^2}-2>0 \quad (x+4)^2-8>0$$

$$\begin{array}{ll} y>0 & x<-4-2\sqrt{2}\vee x>-4+2\sqrt{2} \\ y<0 & -4-2\sqrt{2}<x<-4+2\sqrt{2} \end{array}$$

- Comportamento all'infinito ed eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{(x+4)^2}-2=+\infty$$

nessun asintoto orizzontale, nessun asintoto obliquo.

- crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi: riscriviamo la funzione: $y=(x+4)^{\frac{2}{3}}-2$

$$y^{'}=\frac{2}{3}(x+4)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+4}}$$

$$\begin{array}{lll} y'>0 & x>-4 & crescente \\ y<0 & x<-4 & decrescente \end{array}$$

inoltre

$$\lim_{x\to -4^-}\frac{2}{3\sqrt[3]{x+4}}=\frac{2}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to -4^+}\frac{2}{3\sqrt[3]{x+4}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

il punto di minimo $m(-4;-2)$ è una cuspide.

- concavità della funzione e ricerca di eventuali flessi:

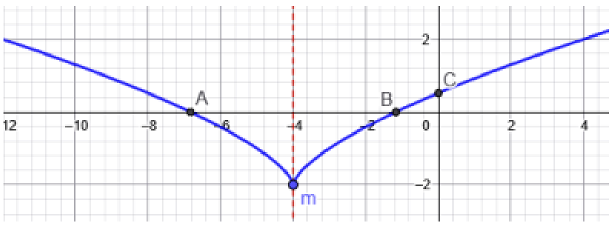
$$y"=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)(x+4)^{-\frac{4}{3}}=\frac{-2}{9(x+4)\sqrt[3]{x+4}}$$

la derivata seconda non si annulla mai

$$y"<0 \;\; \forall x$$

la funzione ha sempre concavità rivolta verso il basso

- grafico



Esercizio 20. Studia le caratteristiche della seguente funzione e tracciane il grafico

$$y=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$$

Soluzione. la funzione va studiata nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

- Dominio: la funzione presenta al numeratore una radice quadrata sempre positiva, essendo il suo radicando la somma di due quadrati; essa è definita quindi per $x\neq 0$, cioè

$$(-\infty;0)\cup(0;-\infty)$$

- Segno della funzione: per quanto detto sopra, il segno della funzione è determinato dal segno del denominatore, per cui

$$\begin{array}{lll} y>0 & per & x>0 \\ y<0 & per & x<0 \end{array}$$

- intersezione con gli assi: intersezione asse x, di equazione $y=0$

$$\sqrt{x^4+1}=0$$

nessuna intersezione;

- intersezione con l'asse y, di equazione $x = 0$, non possibile perché 0 non appartiene al campo di esistenza della funzione

- asintoti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} = \frac{x^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}}{x} = \pm\infty \quad = \quad \lim_{x\to 0^\mp} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} = \mp\infty$$

- punti estremanti: calcolo la derivata prima della funzione, ricordando che la derivata del numeratore va calcolata secondo le regole delle funzioni composte,cioè $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

$$y' = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} \cdot x - 1 \cdot \sqrt{x^4+1}}{x^2} = \frac{2x^4 - (x^4+1)}{x^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}$$

calcoliamo il segno della derivata prima, cioè

$$\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}} > 0$$

$N > 0$ $x^4 - 1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) > 0$, cioè per $x < -1 \vee x > 1$; $D > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ pertanto

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & x < -1 \vee x > 1 \\ y' < 0 & -1 < x < 1 \\ y' = 0 & x = \pm 1 \end{array}$$

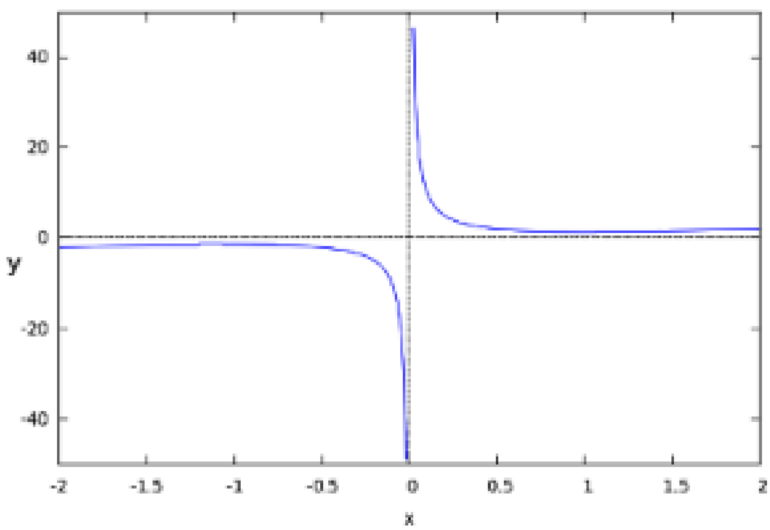
la funzione ha quindi un massimo per $x_{max} = -1$ nel punto di coordinate $M\left(-1; -\sqrt{2}\right)$ e un minimo per $x_{min} = 1$ nel punto di coordinate $m\left(1; \sqrt{2}\right)$

- punti di flesso: calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{4x^3\left(x^2\sqrt{x^4+1}\right) - \left(x^4-1\right)\left(2x\sqrt{x^4+1} + \frac{2x^5}{\sqrt{x^4+1}}\right)}{x^4\left(x^4+1\right)} = \\ &= \frac{4x^5\left(x^4+1\right) - 2x\left(x^4-1\right)\left(2x^4+1\right)}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}} = \frac{2\left(3x^4+1\right)}{x^3\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}} \end{aligned}$$

La derivata seconda è uguale a zero, quando il numeratore è uguale a 0, condizione che non si verifica mai. La funzione non presenta pertanto flessi.

- Grafico:



Esercizio 21. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico

$$y = \frac{|x|}{x} - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

Soluzione. Determiniamo il C.E della funzione: la radice al denominatore è sempre positiva per cui $C.E : \mathbb{R}_0$. La presenza del modulo richiede di distinguere i casi in cui la variabile indipendente è positiva o negativa.

1° caso) $x > 0$, la funzione diviene

$$y = 1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

essa non può intersecare l'asse y per le C.E e non interseca nemmeno l'asse x, come si vede dal calcolo

$$\begin{cases} 1 = \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x^2+5} = x-5 \\ x^2+5 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ \forall x \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Studiamo il segno della funzione per stabilire gli intervalli in cui è positiva e negativa:

$$1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} > 0 \qquad \frac{\sqrt{x^2+5} - x + 5}{\sqrt{x^2+5}} > 0$$

$$\begin{array}{ll} N > 0 & \sqrt{x^2+5} > x-5 \\ & \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x^2+5 > (x-5)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x-5 < 0 \\ x^2+5 > 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x \geq 5 \\ x > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 5 \\ \forall x \in C.E \end{cases} \\ & x \geq 5 \cup x < 5 \ (x \neq 0) \\ D > 0 & \forall x \in C.E \end{array}$$

la funzione risulta quindi sempre positiva.

Cerchiamo eventuali asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} = 1 + \sqrt{5}$$

avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $x = 0$, cioè l'asse delle ascisse.

Cerchiamo ora eventuali punti stazionari, calcolando la derivata prima della funzione

$$y' = -\frac{\sqrt{x^2+5} - (x-5)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} = \frac{-5x-5}{\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}}$$

la derivata è sempre definita nel campo di esistenza. Studiamo il suo suo segno, osservando che il denominatore è sempre positivo, per cui la derivata prima risulta positiva per $x < -1$, cioè la funzione è sempre decrescente nell'intervallo $x > 0$.

Cerchiamo eventuali flessi calcolando la derivata seconda

$$y" = \frac{-5\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}} + 15(x+1)\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+5\right)^3} = \frac{5\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}\left(2x^2+3x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^3} = \frac{5\left(2x^2+3x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^{\frac{5}{2}}}$$

la derivata seconda si annulla quando $2x^2+3x-5 = 0$, cioè per $x = 1$ e $x = -\frac{5}{2}$, quest'ultimo non nell'intervallo $x > 0$. Avremo quindi un flesso nel punto $F\left(1; \frac{3+2\sqrt{6}}{6} \simeq 1,32\right)$

2°) caso per $x<0$, la funzione diventa

$$y=-1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

anche in questo caso non abbiamo intersezioni con gli assi, in quanto il valore $x=2$ non appartiene all'intervallo $x<0$.

Studiamo il segno della funzione per stabilire gli intervalli in cui è positiva e negativa:

$$-1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}>0 \qquad \frac{\sqrt{x^2+5}+x-5}{\sqrt{x^2+5}}<0$$

$$\begin{array}{ll}
N>0 & \sqrt{x^2+5}>5-x \\
 & \begin{cases} 5-x\geq 0 \\ x^2+5>(5-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 5-x<0 \\ x^2+5>0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} x\leq 5 \\ x>2 \end{cases} \cup \begin{cases} x>5 \\ \forall x\in C.E \end{cases} \\
 & 2<x\leq 5 \cup x>5 \\
D>0 & \forall x\in C.E
\end{array}$$

la funzione risulta quindi positiva per $x<2$ e quindi nell'intervallo $x<0$ sarà sempre positiva.

Cerchiamo eventuali asintoti

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}\right)=\sqrt{5}-1$$

avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $x=0$, cioè l'asse delle ascisse.

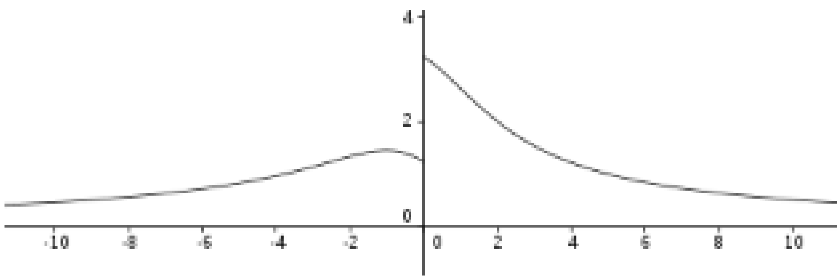
Nella ricerca di eventuali punti stazionari, osserviamo che la derivata prima della funzione è identica a quella già calcolata prima e quindi avremo

$$\begin{array}{lll} y'>0 & per & x<-1 \\ y'<0 & per & -1<x<0 \end{array}$$

la funzione avrà quindi un massimo $M\left(-1;\sqrt{6-1}\simeq 1,45\right)$

Anche la derivata seconda è uguale alla precedente e avremo questa volta un flesso $F_2\left(-\frac{5}{2};\sqrt{5}-1\simeq 1,24\right)$

Il grafico della funzione completa è mostrato nella figura sotto. La funzione presenta una discontinuità di prima specie nel punto di ascissa $x=0$ con un salto $\Delta y=2$



Funzioni goniometriche

Esercizio 22. Studiare la funzione

$$y = \cos^2 x\,(2\sin x - 1)$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e rappresentarla graficamente. Traccia inoltre il grafico del valore assoluto della funzione e del suo logaritmo.

Soluzione: Studiamo la funzione assegnata.

- intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \cos^2 x\,(2\sin x - 1) \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos^2 x\,(2\sin x - 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

- la funzione è continua in tutto l'intervallo chiuso e agli estremi assume i valori $y(0) = -1$ e $f(2\pi) = -1$

- positività e negatività della funzione:

$$\begin{array}{ll} \cos^2 x > 0 & \forall x \\ \sin x > \frac{1}{2} & \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi \end{array}$$

  la funzione è positiva nell'intervallo $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ e negativa negli intervalli $0 < x < \frac{1}{6}\pi$ o $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$

- studio della derivata prima

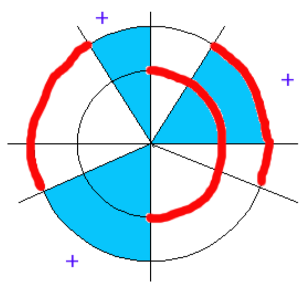
$$y' = \quad -2\cos x \sin x\,(2\sin x - 1) + 2\cos^3 x = \quad 2\cos x\left(-3\sin^2 x + 2\sin x + 1\right)$$

  la derivata prima si annulla per

$$\begin{array}{lll} \cos x = 0 & & x = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \\ 3\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0 & \sin x = -\frac{1}{3}; 1 & x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \quad x = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

  studiamo il segno

$$\begin{array}{ll} \cos x > 0 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -3\sin^2 x + 2\sin x + 1 > 0 & \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right) < x < \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \end{array}$$



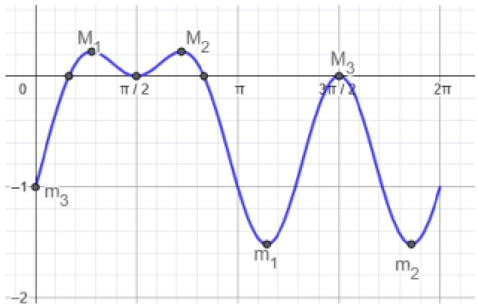
si avranno tre massimi relativi per

$$x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \quad x = \pi - \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

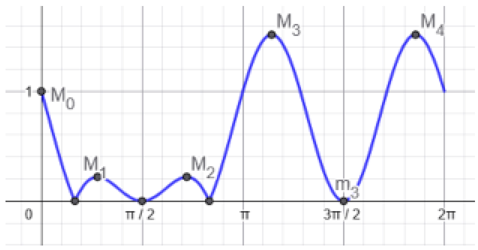
e tre minimi relativi per

$$x = \frac{\pi}{2} \quad x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \quad x = -\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$$

la funzione avrà quindi il seguente andamento



- quesito 1: tracciamo ora il grafico del valore assoluto della funzione. Per questo basta semplicemente eseguire una simmetria rispetto all'asse delle ascisse delle parti negative della funzione. Si otterrà pertanto il seguente grafico



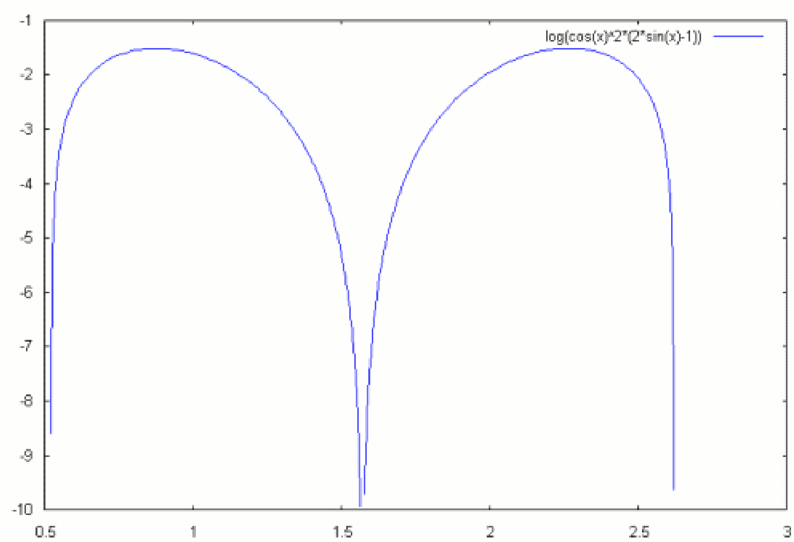
- quesito 2: tracciare il grafico del $\ln f(x)$. Il campo di esistenza è rappresentato dagli intervalli in cui la funzione è strettamente positiva, cioè tra $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]$. Non vi possono essere intersezioni con gli assi e, inoltre, nell'intervallo indicato, la funzione è sempre minore di 1 per cui il logaritmo sarà sempre negativo.
calcoliamo i limite della nuova funzione; siccome $f(x)=0$ per $x=\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}$, il $\ln f(x)$ tenderà sempre a $-\infty$:
Individuazione di massimi e/o minimi: calcolo la derivata prima

$$h(x)=\ln\left(f(x)\right) \qquad h^{'}(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f^{'}(x)$$
$$=\frac{\cos x\left(\cos^2 x-2\sin^2 x+\sin x\right)}{\cos^2 x(2\sin x-1)}=\frac{-3\sin^2 x+\sin x+1}{\cos x\left(2\sin x-1\right)}$$

ne studio il segno

$$\begin{array}{lcc} N>0 & 3\sin^2 x-\sin x-1<0 & \arcsin\frac{1+\sqrt{13}}{6}<x<\frac{5\pi}{6} \\ D>0 & \cos x>0 & \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2} \\ & \sin x>\frac{1}{2} & \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}\vee\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6} \end{array}$$

la figura offre la risoluzione grafica



Esercizio 23. Studiare la funzione

$$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e rappresentarla graficamente.

Soluzione. Il dominio è indicato e comprende tutti i valori di $x \in [0; 2\pi]$

- intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = \sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \sqrt{3} - 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

risolviamo l'equazione lineare con la sostituzione $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ con $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2} - 1 = 0 \quad t^2\left(\sqrt{3}+1\right) - 2t - \left(\sqrt{3}-1\right) = 0 \quad t_1\sqrt{3} - 2 \quad t_2 = 1$$

per cui

$$\begin{cases} \tan \frac{x}{2} = \sqrt{3} - 2 \\ \tan \frac{x}{2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

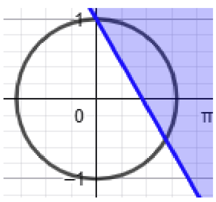
- segno

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 > 0$$

risolviamo graficamente sostituendo $\cos x = X$, $\sin x = Y$ e costruendo il sistema

$$\begin{cases} X^2 + y^2 = 1 \\ \sqrt{3}X + y - 1 \geq 0 \end{cases}$$

si ottiene



avremo $y > 0$ per $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ e $y < 0$ per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{11}{6}\pi$

- valori agli estremi del dominio $y(0) = y(2\pi) = \sqrt{3} - 1$
- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$y' = \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \quad \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

avremo

$$\begin{array}{lll} y' > 0 & 0 < x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{7}{6}\pi < x < 2\pi & crescente \\ y' < 0 & \frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} & decrescente \end{array}$$

avremo un massimo relativo $M\left(\frac{\pi}{6};1\right)$ e un minimo relativo $m\left(\frac{7}{6}\pi;-3\right)$

- concavità e flessi

$$y" = -\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

la derivata seconda si annulla per

$$\tan x = -\sqrt{3} \quad x = \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi$$

avremo

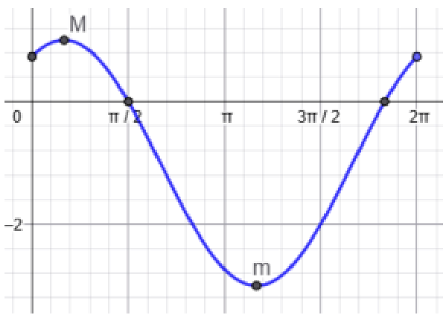
$$-\sin x - \sqrt{3}\cos x > 0 \quad \tan x < -\sqrt{3} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{2}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$$

per cui

$$\begin{array}{lll} y" > 0 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{3}\pi & convatit\grave{a}\ verso\ l'alto \\ y' < 0 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi & convatit\grave{a}\ verso\ il\ basso \end{array}$$

avremo due flessi $F_1\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ e $F_2\left(\frac{5}{3}\pi;0\right)$

- grafico



Esercizio 24. Studiare la funzione

$$y = 2\sin^2 x - \sin x + 1$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e rappresentarla graficamente.

Soluzione. Il dominio è indicato e comprende tutti i valori di $x \in [0; 2\pi]$

- intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = 2\sin^2 x - \sin x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \\ y = mai \end{cases}$$

risolviamo l'equazione

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{4} \qquad nessuna\ soluzione$$

- segno

$$2\sin^2 x - \sin x + 1 > 0$$

come visto, il discriminante è negativo e la disequazione è verificata per ogni valore del dominio, per cui la funzione è sempre positiva.

- valori agli estremi del dominio $y(0) = y(2\pi) = 1$

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$\begin{array}{cc} y' = 4\sin x\cos x - \cos x = 0 & \cos x(4\sin x - 1) = 0 \\ \cos x = 0 & x = \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \\ \sin x = \frac{1}{4} & x = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{ll} \cos x > 0 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \pi < x < \frac{3}{2}\pi \\ \sin x > \frac{1}{4} & \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) < x < \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \end{array}$$

da cui risulta

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) < x < \frac{\pi}{2} \vee \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) < x < \frac{3}{2}\pi \\ y' < 0 & 0 < x < \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \vee \frac{\pi}{2} < x < \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \vee \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \end{array}$$

avremo due massimi relativi $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$, $M_2\left(\frac{3}{2}\pi; 4\right)$ e due minimi relativi $m_1\left(\arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{7}{8}\right)$, $m_2\left(\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{7}{8}\right)$

- concavità e flessi

$$y" = 4\cos^2 x - 4\sin^2 x + \sin x = -8\sin^2 x + \sin x + 4$$

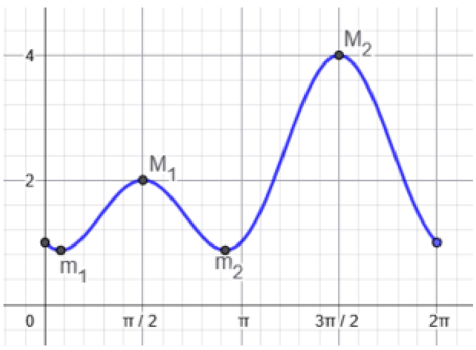
la derivata seconda si annulla per

$$8\sin^2 x - \sin x - 4 = 0 \quad \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{129}}{16}$$

avremo

$$y" > 0 \quad \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16} < x < \pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16} \vee \pi + \arcsin\frac{1-\sqrt{129}}{16} < x < 2\pi - \arcsin\frac{1\sqrt{129}}{16}$$

- grafico



Esercizio 25. Studiare la funzione

$$y = \sqrt{\sin x + 1}$$

nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ e rappresentarla graficamente.

Soluzione. Il dominio è l'intervallo indicato

- intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y=\sqrt{\sin x+1} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{3}{2}\pi \\ y=0 \end{cases}$$

- segno

$$\sqrt{\sin x+1}>0$$

la funzione seno ha come codominio $[-1;1]$ per cui la disequazione è sempre verificata.

- valori agli estremi del dominio $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=y\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+1}}$$
$$\cos x=0 \qquad x=\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi$$

avremo

$$\begin{array}{ll} y'>0 & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ y'<0 & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi \end{array}$$

avremo un massimo relativo $M\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{2}\right)$ e due minimi assoluti negli estremi del dominio. Negli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+1}}=\infty \qquad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+1}}=\infty$$

e i due punti sarebbero cuspidi

- concavità e flessi

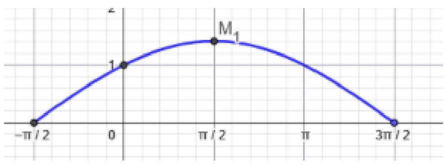
$$y"=\frac{\frac{1}{2}\left(-\sin x\sqrt{\sin x+1}-\frac{\cos^2 x}{2\sqrt{\sin x+1}}\right)}{\sin x+1}=\frac{-(\sin x+1)}{4\sqrt{\sin x+1}}$$

la derivata seconda si annulla per

$$\sin x=-1 \quad x=\frac{3}{2}\pi$$

la frazione è sempre negativa e la funzione avrà sempre la concavità rivolta verso il basso.

- grafico



Esercizio 26. Studiare la funzione

$$y=\frac{1-\cos x}{\sin x+\cos x}$$

nell'intervallo $[0,2\pi]$ e rappresentarla graficamente.

Soluzione. Il denominatore si annulla se, ricordando le formule di addizione

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \sqrt{2}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) = 0$$

cioè

$$x = \tfrac{7}{4}\pi \quad x = \tfrac{3}{4}\pi$$

$$D = \left[0;\frac{3}{4}\pi\left[\cup\right]\frac{3}{4}\pi;\frac{7}{4}\pi\left[\cup\right]\frac{7}{4}\pi;2\pi\right]$$

- intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = \frac{1-\cos x}{\sin x+\cos x} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sin x+\cos x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0; 2\pi \\ y = 0 \end{cases}$$

- segno

$$\frac{1-\cos x}{\sin x+\cos x} > 0$$

$$\begin{array}{ccc} Num > 0 & \cos x < 1 & \forall x \in D - \{0;2\pi\} \\ Den > 0 & \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0 & 0 < x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x < 2\pi \end{array}$$

per cui

$$\begin{array}{ll} y > 0 & 0 < x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x < 2\pi \\ y < 0 & \frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi \end{array}$$

- valori agli estremi del dominio $y\left(0^+\right) = y\left(2\pi^-\right) = 0$
- asintoti

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} \frac{1-\cos x}{\sin x+\cos x} = +\infty \quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} \frac{1-\cos x}{\sin x+\cos x} = -\infty \quad \lim_{x\to\frac{7\pi}{4}^-} \frac{1-\cos x}{\sin x+\cos x} = -\infty \quad \lim_{x\to\frac{7\pi}{4}^+} \frac{1-\cos x}{\sin x+\cos x} = +\infty$$

asintoti verticali $x = \frac{3}{4}\pi$ e $x = \frac{7}{4}\pi$

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$y' = \frac{\sin x\left(\sin x+\cos x\right) - \left(1-\cos x\right)\left(\cos x - \sin x\right)}{\left(\sin x + \cos x\right)^2} = \frac{1+\sin x - \cos x}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}$$

avremo

$$y' = 0 \quad 1+\sin x - \cos x = 0$$

studiamo l'equazione che si può riscrivere come

$$\sin\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \tfrac{3}{2}\pi \quad x = 2\pi$$

da cui

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & 0 < x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{3}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \\ y' < 0 & \frac{3}{2}\pi < x < \frac{7}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x < 2\pi \end{array}$$

massimo relativo $M\left(\frac{3}{2}\pi;-1\right)$.

- concavità e flessi

$$y" = \frac{\left(\sin x+\cos x\right)^2 - 2\left(-\sin x+\cos x\right)1+\sin x - \cos x}{\left(\sin x+\cos x\right)^3} = \frac{3-\sin 2x + 2\left(\sin x - \cos x\right)}{\left(\sin x + \cos x\right)^3}$$

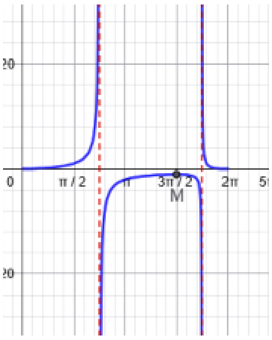
riscriviamo il numeratore mediante la sostituzione $t = \sin x - \cos x$ e $t^2 = \left(\sin x - \cos x\right)^2 = 1-\sin 2x$; allora si può riscrivere come $2+t^2+2t = \left(t+1\right)^2+1$, cioè

$$\left(\sin x - \cos x + 1\right)^2 + 1$$

il numeratore è quindi sempre positivo e il segno dipende dal denominatore e si ha

$$\begin{array}{ll} y" > 0 & 0 < x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{3}{4}\pi < x < 2\pi \\ y' < 0 & \frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi \end{array}$$

- grafico



Esercizio 27. Studiare la funzione
$$y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}$$
nell'intervallo $[0,2\pi]$ e rappresentarla graficamente.

Soluzione. Il denominatore si annulla se
$$\sin 2x=0 \quad x=0,\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3}{2}\pi,2\pi$$
$$D=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\cup\left]\pi;\frac{3}{2}\pi\right[\cup\left]\frac{3}{2}\pi;2\pi\right[$$

- intersezione con gli assi
$$\begin{cases}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=0\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\frac{\pi}{4};\frac{5}{4}\pi\\ y=0\end{cases}\quad A\left(\frac{\pi}{4};0\right),\ B\left(\frac{5}{4}\pi;0\right)$$

- segno
$$\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}>0$$
$$\begin{array}{ccc} Num>0 & \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0 & \frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi\\ Den>0 & \sin\left(2x\right)>0 & 0<x<\frac{\pi}{2}\vee\pi<x<\frac{3}{2}\pi\end{array}$$
per cui
$$\begin{array}{cc} y>0 & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\vee\pi<x<\frac{5}{4}\pi\vee\frac{3}{2}\pi<x<2\pi\\ y<0 & 0<x<\frac{\pi}{4}\vee\frac{\pi}{2}<x<\pi\vee\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi\end{array}$$

- valori agli estremi del dominio
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{0^+}=-\infty\qquad\lim_{x\to2\pi^-}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{0^-}=+\infty$$
eventuali asintoti
$$\begin{array}{ll}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{0^+}=+\infty & \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{0^-}=-\infty & \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{-1}{0^+}=-\infty & \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\frac{-1}{0^-}=+\infty\end{array}$$
avremo tre asintoti verticali di equazione $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\frac{3}{2}\pi$ oltre all'asintoto verticale destro $x=0$ e quello sinistro $x=2\pi$.

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$y'=\frac{(\sin x+\cos x)(2\sin x\cos x)-2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)(\sin x-\cos x)}{\sin^2 2x}=\frac{2\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)}{\sin^2 2x}$$

studiamo il numeratore

$$\sin^3 x+\cos^3 x=0 \quad (\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)=0$$

il primo fattore si può riscrivere come

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)=0 \quad x=\tfrac{3}{4}\pi \quad x=\tfrac{5}{4}\pi$$

il secondo fattore (dividendo tutto per $\cos^2 x$) è sempre positivo ($\Delta<0$)

$$\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x=0 \quad \tan^2 x-\tan x+1=0 \quad mai$$

il denominatore è sempre positivo nel dominio per cui il segno della derivata è dato da quello del primo fattore al numeratore

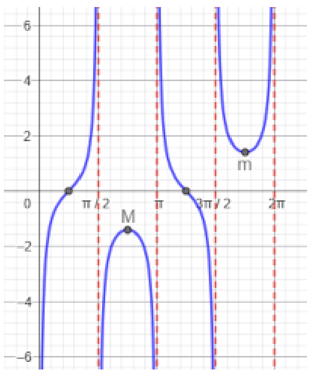
$$\begin{array}{ll} y'>0 & 0<x<\frac{3}{4}\pi\vee\frac{5}{4}\pi<x<2\pi \\ y'<0 & \frac{3}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi \end{array}$$

la funzione sarà quindi

$$\begin{array}{ll} crescente & 0<x<\frac{\pi}{2}\vee\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{4}\pi\vee\frac{7}{4}\pi<x<2\pi \\ decrescente & \frac{3}{4}\pi<x<\pi\vee\pi<x<\frac{3}{2}\pi\vee\frac{3}{2}\pi<x<\frac{7}{4}\pi \end{array}$$

avremo un massimo relativo $M\left(\frac{3}{4}\pi;-\sqrt{2}\right)$ e un minimo relativo $m()$

- tralasciamo la derivata seconda per evitare un calcolo eccessivo
- grafico



Funzioni esponenziali

Esercizio 28. Studiare la funzione $y=x\left(1+e^{-x}\right)$ e tracciarne il grafico

- Dominio: la funzione esiste sempre, cioè $D:\forall x\in\mathbb{R}$.

- **Intersezioni con gli assi**: intersezione con l'asse x

$$\begin{cases} x\left(1+e^{-x}\right)=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

La funzione incontra gli assi cartesiani soltanto nella loro origine $O\,(0;0)$.

- **Segno**: studiamo la positività e negatività della funzione, osservando che il fattore $1+e^{-x}$ è sempre maggiore di 0, avremo

$$\begin{array}{lll} y>0 & per & x>0 \\ y<0 & per & x<0 \end{array}$$

- **Asintoti**: calcoliamo il comportamento della funzione per $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1+e^{-x}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(1+e^{-x}\right)=+\infty$$

ricordando che $e^{-x}\to 0$ per $x\to+\infty$ e $e^{-x}\to+\infty$ per $x\to+\infty$. Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui; visto il diverso comportamento dell'esponenziale divideremo lo studio nei due rami della funzione

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+e^{-x}\right)}{x}=+\infty \qquad m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+e^{-x}\right)}{x}=1$$
$$q=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+e^{-x}\right)-x=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$$

avremo un asintoto obliquo per il ramo positivo di equazione $y=x$. Non avremo asintoti orizzontali o verticali.

- **Crescenza e Decrescenza**: individuiamo i punti stazionari calcolando la derivata prima della funzione

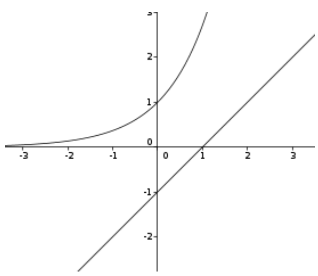
$$y'=1+e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)=1+e^{-x}-xe^{-x}=\frac{e^x-x+1}{e^x}$$

uguagliamo a zero la derivata

$$e^x-x+1=0 \qquad e^x=x-1$$

risolviamo l'equazione graficamente mediante il sistema

$$\begin{cases} z=e^x \\ z=x-1 \end{cases}$$



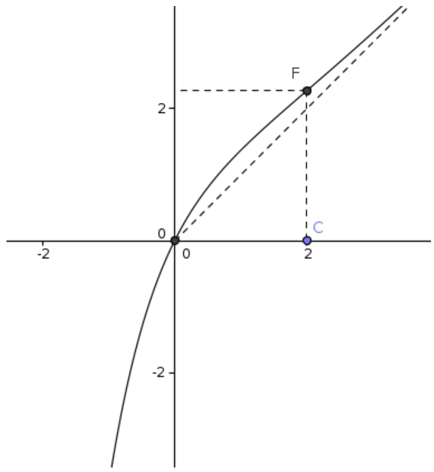
come si può notare $e^x>x-1$ per ogni valore di x, per cui la funzione sarà sempre crescente.

- **Flessi**: calcoliamo la derivata seconda e uguagliamola a zero

$$y"=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}\,(x-2)$$

la derivata seconda si annulla per $x=2$ e avrà concavità verso il basso per $x<2$ e concavità verso l'alto per $x>2$. Avremo quindi il flesso $F\left(2;2\left(1-e^{-2}\right)\simeq 2.27\right)$.

- Rappresentazione grafica della funzione



Esercizio 29. Studiare la funzione

$$y = e^{-4x+2x^2}$$

Soluzione. Dominio: il dominio della funzione esponenziale è quello del suo esponente; in questo caso avremo $D = \mathbb{R}$

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = e^{-4x+2x^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{-4x+2x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad mai \quad A(0;1)$$

- la funzione esponenziale è sempre positiva
- comportamento all'infinito

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-4x+2x^2} = e^{+\infty} = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-4x+2x^2} = e^{x^2\left(2-\frac{4}{x}\right)} = +\infty$$

non ci sono asintoti

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = 4e^{-4x+2x^2}(x-1) = 0 \quad x = 1$$

studiamo il segno della derivata

$$\begin{array}{cc} x > 1 & crescente \\ x < 1 & decrescente \end{array}$$

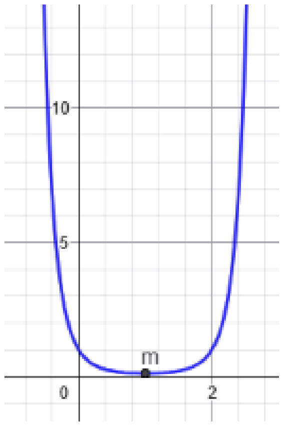
la funzione ha un minimo nel punto $m\left(1; e^{-2}\right)$.

- concavità, flessi

$$y" = e^{-4x+x^2}(4x-4)^2 + 4e^{-4x+x^2} = 4e^{-4x+x^2}\left(4x^2 - 8x + 5\right) = 0 \quad \Delta < 0 \;\; la$$

derivata seconda è sempre positiva e la funzione ha concavità rivolta verso l'alto; nessun flesso.

- grafico:



Esercizio 30. Studiare la funzione

$$y = e^{|x-2|}$$

Soluzione. Dominio: il dominio della funzione esponenziale è quello del suo esponente; in questo caso avremo $D = \mathbb{R}$

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = e^{|x-2|} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = e^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{|x-2|} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad mai \quad A\left(0; e^2\right)$$

- la funzione esponenziale è sempre positiva
- comportamento all'infinito e nel punto $x = 2$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{|x-2|} = +\infty \quad \lim_{x \to \pm 2} e^{|x-2|} = 1$$

non ci sono asintoti e la funzione è continua in $x = 2$

- crescenza, decrescenza, max, min: la funzione per la presenza del modulo si divide in due rami

$$\begin{array}{ll} y_1 = e^{x-2} & per\ x \geq 2 \\ y_2 = e^{2-x} & per\ x < 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y_1' = e^{x-2} = 0 & mai \\ y_2' = -e^{2-x} = 0 & mai \end{array}$$

studiamo il segno della derivata

$$\begin{array}{ll} x \geq 2 & crescente \\ x < 2 & decrescente \end{array}$$

nel punto $x = 2$ si ha

$$y_1'(2) = 1 \quad y_2'(2) = -1$$

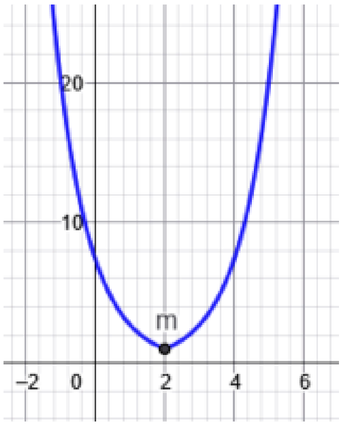
la derivata assume valori finiti ma diversi e la funzione non è derivabile in questo punto; ha un minimo a cuspide nel punto $m(2; 1)$.

- concavità, flessi

$$\begin{array}{ll} y"_1 = e^{x-2} & per\ x \geq 2 \\ y"_2 = e^{2-x} & per\ x < 2 \end{array}$$

la derivata seconda è sempre positiva e la funzione ha concavità rivolta verso l'alto; nessun flesso.

- grafico:



Esercizio 31. Studiare la funzione

$$y = e^{\frac{x-1}{2-x}}$$

Soluzione. Dominio: il dominio della funzione esponenziale è quello del suo esponente; in questo caso avremo $D = \mathbb{R} - \{2\}$

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = e^{\frac{x-1}{2-x}} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{\frac{x-1}{2-x}} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad mai \quad A\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

- la funzione esponenziale è sempre positiva
- comportamento all'infinito

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x-1}{2-x}} = \frac{1}{e}^{+} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x-1}{2-x}} = \frac{1}{e}^{-}$$

si ha un asintoto orizzontale di equazione $y = \frac{1}{e}$

- eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x\to2^-} e^{\frac{x-1}{2-x}} = \lim_{x\to2^-} e^{\frac{1}{0^+}} = +\infty \quad \lim_{x\to2^+} e^{\frac{x-1}{2-x}} = \lim_{x\to2^+} e^{\frac{1}{0^-}} = 0$$

avremo un asintoto verticale sinistro $x = 2$.

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = e^{\frac{x-1}{2-x}} \frac{2-x+x-1}{(2-x)^2} = \frac{e^{\frac{x-1}{2-x}}}{(2-x)^2}$$

studiamo il segno della derivata

$$\begin{array}{cc} Num > 0 & \forall x \in D \\ Den > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

la funzione è sempre crescente.

- concavità, flessi

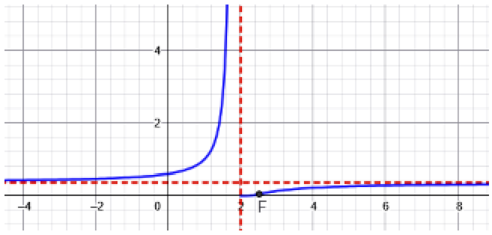
$$y" = \frac{e^{\frac{x-1}{2-x}}\left(\frac{1}{(2-x)^2}\right)(2-x)^2 + 2(2-x)e^{\frac{x-1}{2-x}}}{(2-x)^4} = \frac{e^{\frac{x-1}{2-x}}(5-2x)}{(2-x)^4} = 0 \quad x = \frac{5}{2}$$

il segno della derivata seconda è:

$$\begin{array}{ccc} y" > 0 & x < \frac{5}{2}\ (x \neq 2) & concavit\grave{a}\ verso\ l'alto \\ y" < 0 & x > \frac{5}{2} & concavit\grave{a}\ verso\ il\ basso \end{array}$$

si ha un flesso nel punto $F\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{e^3}\right)$

- grafico:



Esercizio 32. Studiare la funzione

$$y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

Soluzione. Dominio: nella funzione il denominatore deve essere diverso da zero; in questo caso avremo

$$e^x = 1 \quad x = 0$$

per cui $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} \frac{2e^x}{e^x-1} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad mai$$

- studiamo il segno della funzione

$$\frac{2e^x}{e^x-1} > 0$$

$$\begin{array}{ccc} Num > 0 & 2e^x > 0 & \forall x \in D \\ Den > 0 & e^x > 1 & x > 0 \end{array}$$

per cui $y > 0$ per $x > 0$ e $y < 0$ per $x < 0$.

- comportamento all'infinito

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x}{e^x-1} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x-1} = 2$$

si ha un asintoto orizzontale sinistro $y = 0$ e uno destro $y = 2$.

- eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2e^x}{e^x-1} = -\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{2e^x}{e^x-1} = +\infty$$

avremo un asintoto verticale sinistro $x = 0$.

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = \frac{2e^x(e^x - 1) - 2e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

studiamo il segno della derivata

$$\begin{array}{cc} Num > 0 & mai \\ Den > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

la funzione è sempre decrescente.

- concavità, flessi

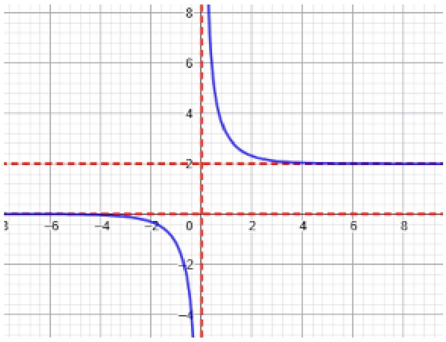
$$y" = \frac{-2e^x(e^x-1)^2 + 4e^{2x}(e^x-1)}{(e^x-1)^4} = \frac{2e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3} = 0$$

il numeratore è sempre positivo, il denominatore lo è per $x > 1$ per cui:

$$\begin{array}{ccc} y" > 0 & x > 0 & concavità\ verso\ l'alto \\ y" < 0 & x < 0 & concavità\ verso\ il\ basso \end{array}$$

non ci sono flessi.

- grafico:



Esercizio 33. Studiare la funzione

$$y=\sqrt{3^{2x-1}-3^x}$$

Soluzione. Dominio: nella funzione il denominatore deve essere diverso da zero; in questo caso avremo

$$3^{2x-1}-3^x\geq 0 \quad \frac{3^{2x}}{3}-3^x\geq 0 \quad 3^x\left(\frac{3^x}{3}-1\right)\geq 0$$

$$3^x>0 \quad \forall x \quad 3^x\geq 3 \quad x\geq 1$$

per cui $D=[1;+\infty[$

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} 3^{2x-1}-3^x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad x=1 \qquad A(1;0)$$

- lo studio del segno ricalca quello del dominio per cui $y>0$ per $x>1$, cioè la funzione è sempre positiva o nulla nel dominio

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to 1^+} 3^{2x-1}-3^x=0 \qquad \lim_{x\to +\infty} 3^{2x-1}-3^x=+\infty$$

si ha un asintoto orizzontale destro $y=0$.

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y'=\frac{2\cdot 3^{2x-1}\ln 3-3^x\ln 3}{2\sqrt{3^{2x-1}-3^x}}=\frac{3^x\ln 3\left(\frac{2}{3}3^x-1\right)}{2\sqrt{3^{2x-1}-3^x}}$$

studiamo il segno della derivata (3^x sempre positivo, così come il denominatore nel dominio)

$$\tfrac{2}{3}3^x-1>0 \quad x>\log_3\tfrac{3}{2}$$

ma $x=\log_3\frac{3}{2}\notin D$, per cui la derivata è positiva per $x>1$, cioè la funzione è sempre crescente.

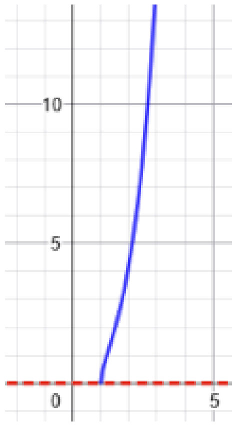
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3^x\ln 3\left(\frac{2}{3}3^x-1\right)}{2\sqrt{3^{2x-1}-3^x}}=+\infty$$

la funzione in $x=1$ non è derivabile.

- tralasciamo lo studio della derivata seconda

$$y"=\frac{2\left(\frac{4}{3}\cdot 3^{2x}\ln^2 3-3^x\ln^2 3\right)\sqrt{3^{2x-1}-3^x}-\frac{3^{2x-1}\ln 3-3^x\ln 3}{4\sqrt{3^{2x-1}-3^x}}}{4\left(3^{2x-1}-3^x\right)}$$

- grafico:



Esercizio 34. Studiare la funzione

$$y = (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}}$$

Soluzione. Dominio: il dominio di un esponenziale è quello del suo esponente, per cui avremo $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} x-2=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \qquad A(2;0)$$

- studio del segno

$$(x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} > 0$$

$$\begin{array}{llll} x-2>0 & x>2 & y>0 & per\, x>2 \\ e^{-\frac{1}{x}}>0 & \forall x \in D & y<0 & per\, x<0 \vee 0<x<2 \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to-\infty} (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

nessun asintoto orizzontale; verifichiamo un eventuale asintoto obliquo

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 1 \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} - x = x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) - 2e^{-\frac{1}{x}}$$

questo limite è più complesso e lo risolviamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) - \lim_{x\to\pm\infty} 2e^{-\frac{1}{x}}$$

nel primo limite ponendo $t = \frac{1}{x}$ si ottiene un limite notevole

$$\lim_{t\to0} - \left(\frac{e^{-t}-1}{t}\right) = -(1)$$

per cui

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} - x = -1-2 = -3$$

avremo un asintoto obliquo di equazione $y = x-3$; verifichiamo eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x\to0^-} (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} = -\infty \quad \lim_{x\to0^+} (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$x = 0$ punto di discontinuità non eliminabile; avremo un asintoto verticale sinistro $x = 0$

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)\,e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right)$$

  la derivata si annulla per $x=-2$ e $x=1$; studiamo il segno della derivata ($e^{-\frac{1}{x}}$ sempre positivo nel dominio), per cui

$$\begin{array}{ccccc} \frac{x^2+x-2}{x^2} > 0 & Num > 0 & x < -2 \vee x > 1 & x < -2 \vee x > 1 & crescente \\ & Den > 0 & \forall x \neq 0 & -2 < x < 0 \vee 0 < x < 1 & decrescente \end{array}$$

  si ha un massimo relativo in $M\left(-2; -4\sqrt{e}\right)$ e un minimo relativo in $m\left(1; -\frac{1}{e}\right)$; la funzione in $x=0$ non è derivabile.

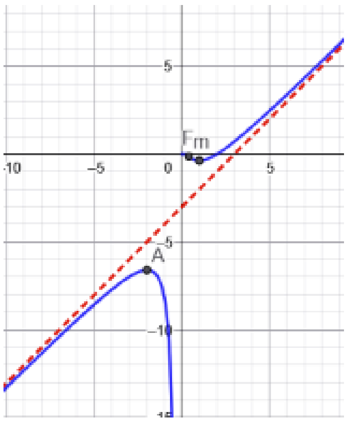
- concavità e flessi

$$y" = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right) + e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{(2x+1)\,x^2 - 2x\left(x^2+x-2\right)}{x^4}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{5x-2}{x^4}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} y" > 0 & x > \frac{2}{5} & concavit\grave{a}\, verso\, l'alto \\ y" < 0 & x < 0 \vee 0 < x < \frac{2}{5} & concavit\grave{a}\, verso\, il\, basso \end{array}$$

  avremo un flesso nel punto $F\left(\frac{2}{5}; -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$

- grafico:



Esercizio 35. Tracciare il grafico della funzione

$$y = \left|1 - \sqrt[3]{e^{x-1}}\right|$$

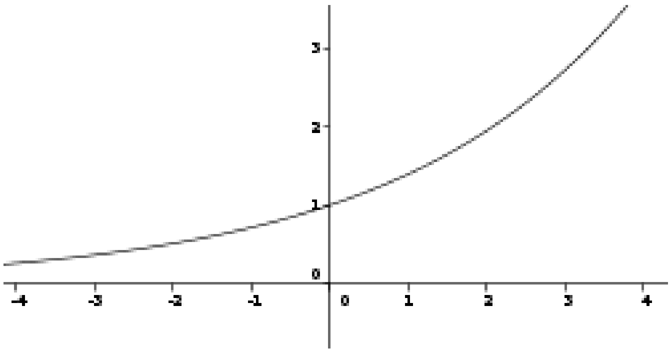
e scrivere le equazioni delle tangenti alla curva negli eventuali punti di intersezione con gli assi coordinati.

Soluzione. questa funzione può essere studiata nelle forme tradizionali. Si può ottenere il suo grafico molto più rapidamente costruendola mediante successive trasformazioni, riscrivendo la funzione nella forma

$$y = \left|1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot e^{\frac{x}{3}}\right|$$

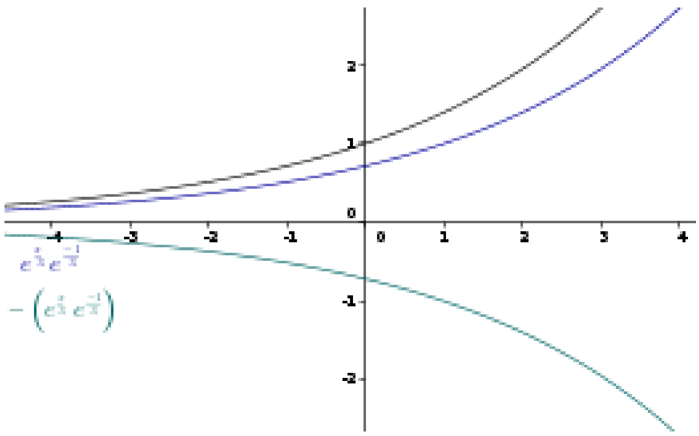
- La nostra funzione di partenza sarà $y = e^x$, funzione che consideriamo nota

rappresentiamo $y = e^{\frac{x}{3}}$, applicando una dilatazione orizzontale: la forma grafica sarà

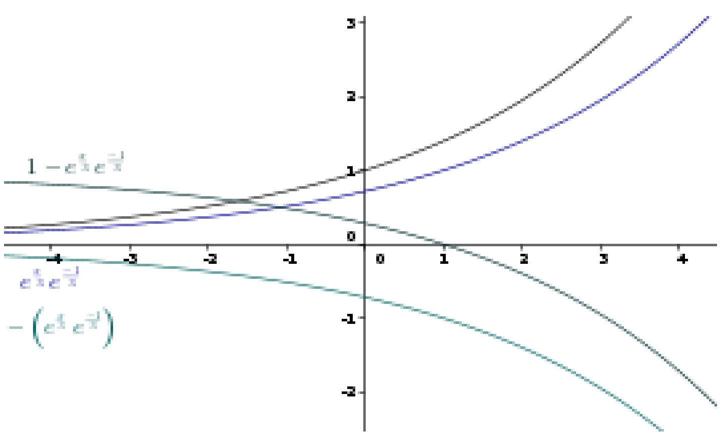


- rappresentiamo ora $y = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot e^{\frac{x}{3}}$, una dilatazione verticale

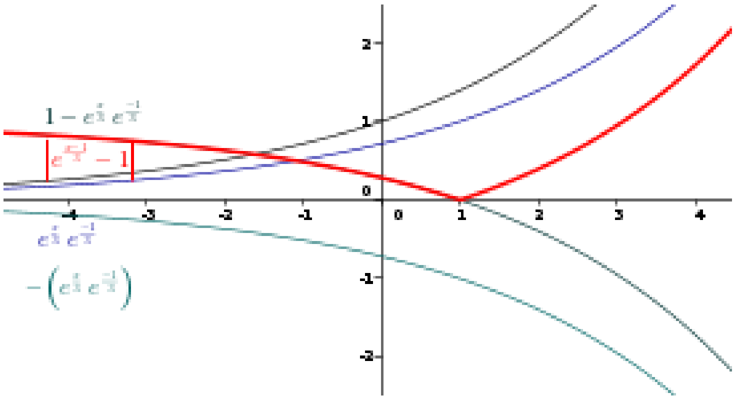
- Costruiamo la simmetrica rispetto all'asse delle x, $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot e^{\frac{x}{3}}$



- operiamo una traslazione verticale verso l'alto di vettore $(0;1)$



- costruiamo il simmetrico rispetto all'asse x della parte negativa della funzione



La funzione interseca gli assi nei punti

$$asse\,x \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=1-\sqrt[3]{\frac{1}{e}} \simeq 0.28 \end{cases}$$

$$asse\,y \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Si può osservare che il punto di coordinate (1;0) è un punto angoloso. Infatti calcolando le due derivate si ottengono due tangenti diverse.

$$per\,x \le 1 \quad y' = -\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}} \quad y'(1) = -\frac{1}{3}$$

$$per\,x > 1 \quad y' = \frac{1}{3}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}} \quad y'(1) = \frac{1}{3}$$

le rette tangenti avranno equazioni $y = \pm\frac{1}{3}(x-1)$

La derivata nel punto $\left(0;1-\sqrt[3]{\frac{1}{e}}\right)$ avrà valore $y'(0) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}$ e l'equazione della tangente sarà $y = -\frac{1}{3\sqrt[3]{e}}x + 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

Funzioni logaritmiche

Esercizio 36. Studiare la funzione

$$y = \ln\left(x^2-2x\right)$$

Soluzione. Dominio: l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, per cui

$$x^2-2x>0 \quad x<0 \vee x>2$$

$D = \left]-\infty;0\right[\cup \left]2;+\infty\right[$

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} \ln(x^2-2x)=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2x-1=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad A(1-\sqrt{2};0),\, B(1+\sqrt{2};0)$$

- studio del segno

$$\ln\left(x^2-2x\right)>0 \quad x^2-2x-1>0$$

$$\begin{array}{ll} y>0 & per\, x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2} \\ y<0 & per\, 1-\sqrt{2}<x<0 \vee 2<x<1+\sqrt{2} \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(x^2-2x\right)=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2-2x\right)=+\infty$$

nessun asintoto orizzontale; verifichiamo eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(x^2-2x\right)=-\infty \quad \lim_{x\to 2^+} \ln\left(x^2-2x\right)=-\infty$$

avremo un asintoto verticale sinistro $x=0$ e uno destro $x=2$

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y'=\frac{2x-2}{x^2-2x}$$

la derivata si annulla per $x=1$; studiamo il segno

$$\begin{array}{cccc} Num>0 & x>1 & 0<x<1 \vee x>2 & crescente \\ Den>0 & x<0 \vee x>2 & x<0 \vee 1<x<2 & decrescente \end{array}$$

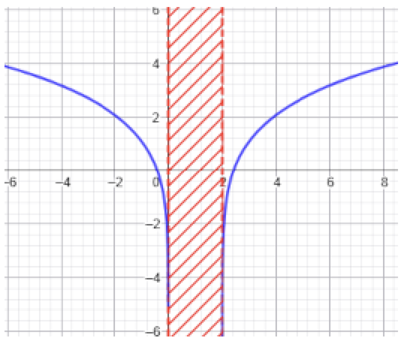
nessun massimo o minimi relativi.

- concavità e flessi

$$y"=\frac{2\left(x^2-2x\right)-(2x-2)^2}{\left(x^2-2x\right)^2}=\frac{-2\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2-2x\right)^2}$$

il numeratore è sempre negativo e il denominatore sempre positivo nel dominio e la funzione avrà sempre concavità rivolta verso il basso

- grafico:



Esercizio 37. Studiare la funzione

$$y=\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

Soluzione. Dominio: l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, per cui

$$\tfrac{x^2+4}{x^2-4}>0 \quad x<-2 \vee x>2$$

$D=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

- simmetria: la funzione è pari

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2+4}{x^2-4}=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad mai$$

- studio del segno

$$\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)>0 \qquad \begin{array}{ll} x^4+4>0 & \forall x\in D \\ x^2-4>0 & x<-2\vee x>2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y>0 & per\, x<-2\vee x>2 \\ y<0 & mai \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\ln(1)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)=0$$

asintoto orizzontale $y=0$; verifichiamo eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x\to-2^-}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to-2^-}\ln\left(\frac{8}{0^+}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to2^+}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)=+\infty$$

avremo un asintoto verticale sinistro $x=-2$ e uno destro $x=2$

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y'=\frac{x^2-4}{x^2+4}\cdot\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-16x}{x^4-16}$$

la derivata si annulla per $x=0\notin D$; studiamo il segno

$$\begin{array}{cccc} Num>0 & x<-2 & x<-2 & crescente \\ Den>0 & x<-2\vee x>2 & x>2 & decrescente \end{array}$$

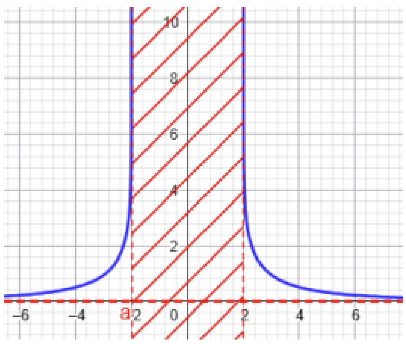
nessun massimo o minimi relativi.

- concavità e flessi

$$y"=\frac{-16\left(x^4-16\right)-4x^3\left(-16x\right)}{\left(x^4-16\right)^2}=\frac{48x^4+256}{\left(x^4-16\right)^2}$$

il numeratore è sempre positivo e il denominatore sempre positivo nel dominio e la funzione avrà sempre concavità rivolta verso l'alto.

- grafico:



Esercizio 38. Studiare la funzione

$$y=\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|$$

Soluzione. Dominio: la funzione si divide in due parti con domini diversi

$$\begin{array}{ll} y_1 = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & x < -2 \vee x > 0 \\ y_2 = \ln\left(-\frac{x+2}{x}\right) & -2 < x < 0 \end{array}$$

- Intersezione con gli assi

$$y_1 : \begin{cases} \left(\frac{x+2}{x}\right) = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 = x \\ y = 0 \end{cases} \quad mai$$

$$y_2 : \begin{cases} \left(-\frac{x+2}{x}\right) = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x - 2 = x \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad A(-1;0)$$

- studio del segno

$$y_1 : \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 0 \qquad \begin{array}{ll} \frac{x+2}{x} - 1 = \frac{2}{x} > 0 & \\ y_1 > 0 & x > 2 \\ y_1 < 0 & x < -2 \end{array}$$

$$y_2 : \ln\left(-\frac{x+2}{x}\right) > 0 \qquad \begin{array}{ll} -\frac{x+2}{x} - 1 = \frac{2x+2}{-x} > 0 & \\ y_2 > 0 & -1 < x < 0 \\ y_2 < 0 & -2 < x < -1 \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln(1) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$$

asintoto orizzontale $y = 0$; verifichiamo eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x \to -2^-} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = -\infty \quad \lim_{x \to -2^+} \ln\left(-\frac{x+2}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \ln\left(-\frac{x+2}{x}\right) = +\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty$$

avremo un asintoto verticale $x = -2$ e uno $x = 0$

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y_1' = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x - x - 2}{x^2} = \frac{-2}{x^2 + 2x}$$

la derivata non si annulla mai; studiamo il segno

$$y_1' : \begin{array}{ll} Num > 0 & mai \\ Den > 0 & x < -2 \vee x > 2 \end{array} \quad sempre\ decrescente$$

$$y_2' = \frac{-x}{x+2} \cdot \frac{-x + x + 2}{x^2} = \frac{-2}{x^2 + 2x}$$

$$y_2' : \begin{array}{ll} Num > 0 & mai\ nel\ dominio \\ Den > 0 & mai\ nel\ dominio \end{array} \quad sempre\ crescente$$

- concavità e flessi

$$y_1" = \frac{(-2x - 2)(-2)}{x^2 (x+2)^2} = \frac{4(x+1)}{x^2 (x+2)^2}$$

$$y"_1 : \begin{array}{ll} Num > 0 & x > 0 \\ Den > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

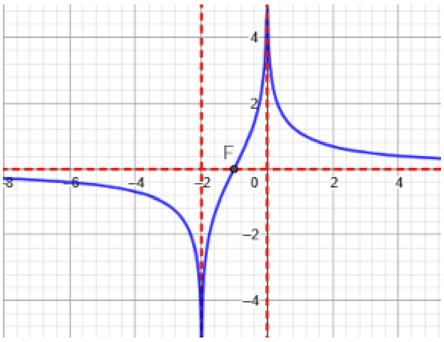
nel dominio $x < -2 \vee x > 0$ avremo concavità verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < -2$.

$$y_2" = \frac{(-2x-2)(-2)}{x^2(x+2)^2} = \frac{4(x+1)}{x^2(x+2)^2}$$

$$y"_1: \begin{array}{cc} Num > 0 & -1 < x < 0 \\ Den > 0 & \forall x \in D \end{array}$$

nel dominio $-2 < x < 0$ avremo concavità verso l'alto per $-1 < x < 0$ e verso il basso per $-2 < x < -1$; flesso nel punto $F(-1;0)$

- grafico:



Esercizio 39. Studiare la funzione

$$y = \frac{\ln x}{2 - \ln x}$$

Soluzione. Dominio:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2 \end{cases}$$

per cui $D:]0; e^2[\cup]e^2; +\infty[$

- Intersezione con gli assi

$$y_1: \begin{cases} \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A(1;0)$$

- studio del segno

$$\frac{\ln x}{2 - \ln x} > 0$$

$$\begin{array}{cc} \ln x > 0 & x > 1 \\ \ln x < 2 & 0 < x < e^2 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{cc} y > 0 & 1 < x < e^2 \\ y < 0 & 0 < x < 1 \vee x > e^2 \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{2 - \ln x} = -1$$

verifichiamo eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x \to e^{2-}} \frac{\ln x}{2 - \ln x} = \lim_{x \to e^{2-}} \frac{2}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to e^{2+}} \frac{\ln x}{2 - \ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{2 - \ln x} = -1$$

avremo un asintoto verticale $x = e^2$

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = \frac{\frac{1}{x}(2-\ln x)+\frac{1}{x}\ln x}{(2-\ln x)^2} = \frac{2}{x(2-\ln x)^2}$$

la derivata non si annulla mai; studiamo il segno

$$y' : \begin{array}{cc} Num > 0 & sempre \\ Den > 0 & x > 0 \end{array}$$

$$y' > 0 \qquad \forall x \in D \qquad f. sempre\, crescente$$

- concavità e flessi

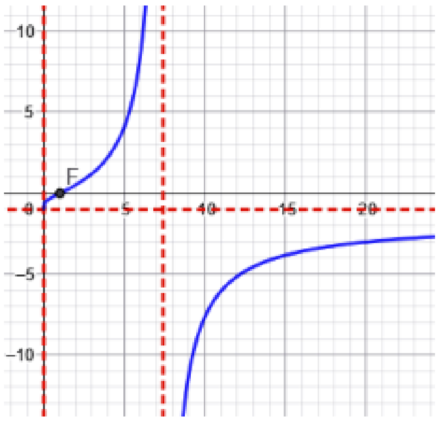
$$y" = \frac{-\left[(2-\ln x)^2 - 2x(2-\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{x^2(2-\ln x)^4} = \frac{\ln x}{x^2(2-\ln x)^3}$$

$$y" : \begin{array}{cc} Num > 0 & x > 1 \\ Den > 0 & 0 < x < e^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y" > 0 & 1 < x < e^2 & concavità\, verso\, l'alto \\ y" < 0 & 0 < x < 1 \vee x > e^2 & concavità\, verso\, il\, basso \end{array}$$

flesso nel punto $F(1;0)$

- grafico:



Esercizio 40. Studiare la funzione

$$y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$$

Soluzione. Dominio:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad x > 1$$

per cui $D :]1;+\infty[$

- Intersezione con gli assi

$$y_1 : \begin{cases} \ln(x-1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad A(2;0)$$

- studio del segno

$$\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}>0$$

$$\begin{array}{ll} \ln(x-1)>0 & x>2 \\ \sqrt{x-1}>0 & x>1 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{ll} y>0 & x>2 \\ y<0 & 1<x<2 \end{array}$$

- comportamento agli estremi (applicando il teorema dell'Hopital)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}=0$$

asintoto orizzontale di equazione $y=0$; verifichiamo eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

avremo un asintoto verticale sinistro $x=1$

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y'=\frac{\frac{1}{x-1}\cdot\sqrt{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\ln(x-1)}{(x-1)}=\frac{2-\ln(x-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

la derivata si annulla per $x=1+e^2$; studiamo il segno

$$y':\ \begin{array}{ll} Num>0 & 1<x<1+e^2 \\ Den>0 & x>1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y'>0 & 1<x<1+e^2 & crescente \\ y'<0 & x>1+e^2 & decrescente \end{array}$$

massimo $M\left(1+e^2;\frac{2}{e}\right)$

- concavità e flessi

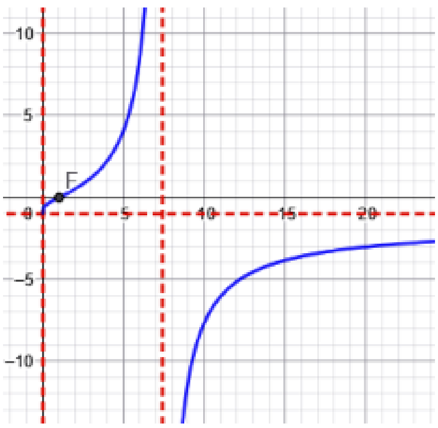
$$y"=\frac{}{x^2(2-\ln x)^4}=\frac{\ln x}{x^2(2-\ln x)^3}$$

$$y":\ \begin{array}{ll} Num>0 & x>1 \\ Den>0 & 0<x<e^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y">0 & 1<x<e^2 & concavità\,verso\,l'alto \\ y"<0 & 0<x<1\vee x>e^2 & concavità\,verso\,il\,basso \end{array}$$

flesso nel punto $F(1;0)$

- grafico:



Esercizio 41. Studiare la funzione

$$y = \frac{\ln x}{4 - \ln^2 x}$$

Soluzione. Dominio:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4 - \ln^2 x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2; e^{-2} \end{cases}$$

per cui $D : \left]0; \frac{1}{e^2}\right[\cup \left]\frac{1}{e^2}; e^2\right[\cup \left]e^2; +\infty\right[$

- Intersezione con gli assi

$$y : \begin{cases} \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A(1;0)$$

- studio del segno

$$\frac{\ln x}{4 - \ln^2 x} > 0$$

$$\begin{array}{ccc} \ln x > 0 & & x > 1 \\ \ln^2 x - 4 < 0 & -2 < \ln x < 2 & e^{-2} < x < e^2 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{ll} y > 0 & 0 < x < \frac{1}{e^2} \vee 1 < x < e^2 \\ y < 0 & \frac{1}{e^2} < x < 1 \vee x > e^2 \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{4 - \ln^2 x} \stackrel{Hop}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-2\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{2 \ln x} = 0^-$$

asintoto orizzontale destro $y = 0$; verifichiamo eventuali asintoti verticali

$$\lim_{x \to e^{-2^-}} \frac{\ln x}{4 - \ln^2 x} = \lim_{x \to e^{-2^-}} \frac{-2}{0^-} = +\infty \qquad \lim_{x \to e^{-2^+}} \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to e^{2^-}} \frac{\ln x}{4 - \ln^2 x} = \lim_{x \to e^{2^-}} \frac{2}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to e^{2^+}} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{4 - \ln^2 x} = 0$$

avremo un asintoto verticale $x = e^{-2}$ e uno $x = e^2$

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\left(4 - \ln^2 x\right) - \ln x \left(-2\frac{\ln^2 x}{x}\right)}{\left(4 - \ln^2 x\right)^2} = \frac{\ln^2 x + 4}{x\left(4 - \ln^2 x\right)^2}$$

la derivata non si annulla mai; studiamo il segno

$$y' : \begin{array}{ll} Num > 0 & sempre \\ Den > 0 & x > 0 \end{array}$$

$$y' > 0 \qquad x > 0 \qquad crescente$$

nessun massimo o minimo relativi

- concavità e flessi

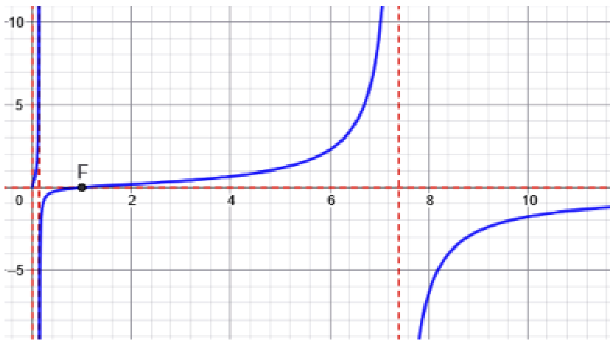
$$y" = \frac{\frac{2x\ln x}{x}\left(4-\ln^2 x\right)^2-\left(\ln^2 x+4\right)\left[\left(4-\ln^2 x\right)^2+2x\left(4-\ln^2 x\right)\left(\frac{-2\ln x}{x}\right)\right]}{x^2\left(4-\ln^2 x\right)^4} =$$
$$= \frac{\ln x\left(\ln^3 x+2\ln^2 x+24\right)}{x^2\left(4-\ln^2 x\right)^3}$$

il numeratore si annulla solo per $x=1$ appartenente al dominio

$$\begin{array}{lcr} y">0 & 0<x<\frac{1}{e^2}\vee 1<x<e^2 & concavità\, verso l'alto \\ y"<0 & \frac{1}{e^2}<x<1\vee x>e^2 & concavità\, verso il basso \end{array}$$

flesso nel punto $F(1;0)$

grafico:



Esercizio 42. Studiare la funzione

$$y=2x^2+\ln(x+1)$$

Soluzione. Dominio:

$$x+1>0 \quad x>-1$$

per cui $D:\left]-1;+\infty\right[$

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} 2x^2+\ln(x+1)=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad O(0;0)$$

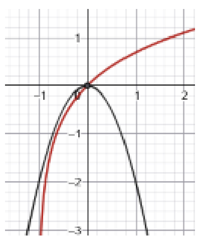
la soluzione è ottenibile osservando che i due addendi si annullano per $x=0$

- studio del segno

$$\ln(x+1)>-2x^2$$

si può studiare graficamente: $y=-2x^2$, parabola con concavità verso il basso; funzione logaritmo traslata verso sinistra di vettore $(-1;0)$

$$\begin{cases} z=-2x^2 \\ z=\ln(x+1) \end{cases}$$



- si osserva quando la curva logaritmica “sta sopra” la curva parabolica

$$\begin{array}{ll} y>0 & x>0 \\ y<0 & x<0 \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^2+\ln(x+1)=+\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} 2x^2+\ln(x+1)=-\infty$$

nessun asintoto orizzontale; asintoti verticale destro $x=-1$

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y'=4x+\frac{1}{(x+1)}=\frac{4x^2+4x+1}{x+1}=\frac{(2x+1)^2}{x+1}$$

la derivata si annulla per $x=-\frac{1}{2}$; studiamo il segno

$$y':\begin{array}{ll} Num>0 & \forall x\in D\neq-\frac{1}{2} \\ Den>0 & x>-1 \end{array}$$

la funzione è sempre crescente; in $x=-\frac{1}{2}$ ci può essere un cambio di concavità

- concavità e flessi

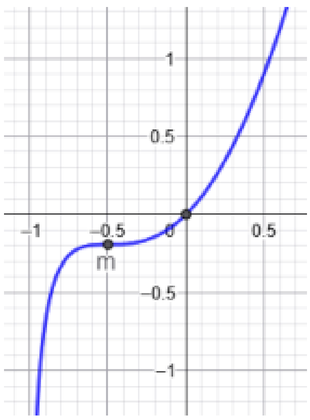
$$y"=\frac{4(2x+1)(x+1)-(2x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{(2x+1)(2x+3)}{(x+1)^2}$$

il numeratore si annulla solo per $x=-\frac{3}{2}\notin D$ e $x=-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{lll} y">0 & x>-\frac{1}{2} & concavità\,verso\,l'alto \\ y"<0 & x<-\frac{1}{2} & concavità\,verso\,il\,basso \end{array}$$

flesso nel punto $F\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\ln 2\right)$

- grafico:



Esercizio 43. Studiare la funzione

$$y=x^2(\ln|x|-1)$$

Soluzione. Dominio: la presenza del modulo di x implica la possibilità di considerare anche i valori negativi della variabile, per cui $D=\mathbb{R}-\{0\}$

- la funzione è pari e ciò ci consente di studiare solo un ramo; prendiamo quello che corrisponde all'intervallo $x>0$.

- Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} x^2(\ln x - 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = e \\ y = 0 \end{cases} \quad A(e;0)$$

- studio del segno

$$x^2(\ln|x| - 1) > 0$$

$$\begin{array}{ll} 1° \, fat & x > 0 \\ 2° \, fat & x > e \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{ll} y > 0 & x > e \\ y < 0 & 0 < x < e \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} x^2(\ln x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2(\ln x - 1) =$$

riscriviamo la funzione moltiplicando:

$$x^2 \ln x - x^2$$

e applichiamo il teorema che stabilisce la il limite di una differenza è uguale alla differenza dei limiti

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x - \lim_{x \to 0^+} x^2$$

riscriviamo il primo limite nella forma e applichiamo il teorema de l'Hopital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = -\frac{x^2}{2} = 0$$

per cui

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x - \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

- la stessa cosa vale per l'intervallo $x < 0$ e per $x = 0$ il limite esiste, ma la funzione non è definita: avremo un punto di discontinuità eliminabile.

- crescenza, decrescenza, max, min

$$y' = 2x(\ln x - 1) + \frac{x^2}{x} = x(2\ln x - 1)$$

la derivata si annulla per $x = \sqrt{e}$; studiamo il segno

$$y': \begin{array}{ll} 1 \, fat > 0 & x > 0 \\ 2 \, fat > 0 & x > \sqrt{e} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y' > 0 & x > \sqrt{e} & crescente \\ y" < 0 & 0 < x < \sqrt{e} & decrescente \end{array}$$

la funzione è crescente; in $x = -\frac{1}{2}$ ci può essere un cambio di concavità

- concavità e flessi

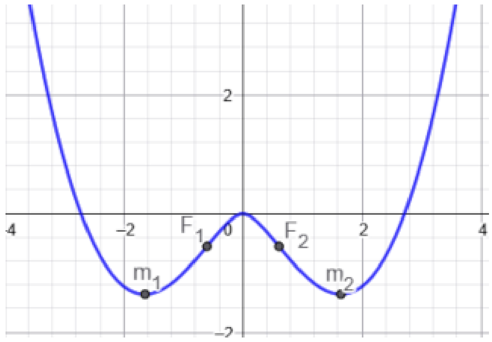
$$y" = 2\ln x - 1 + \frac{2x}{x} = 2\ln x + 1$$

la derivata si annulla per $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\begin{array}{lll} y" > 0 & x > \frac{1}{\sqrt{e}} & concavità \, verso \, l'alto \\ y" < 0 & 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}} & concavità \, verso \, il \, basso \end{array}$$

flesso nel punto $F_1\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; -\frac{3}{2e}\right)$

- costruiamo ora il grafico rappresentando la curva studiata e la sua simmetrica rispetto all'asse y



Esercizio 44. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione

$$y = 2x - \frac{x}{|\ln x|}$$

Soluzione. Dominio: denominatore della frazione diverso da zero e argomento del logaritmo positivo:

$$\begin{cases} \ln x \neq 0 & x \neq 1 \\ x > 0 & x > 0 \end{cases}$$

per cui

$$D: (0;1) \cup (1;+\infty)$$

- La presenza del valore assoluto richiede lo studio della funzione nei due intervalli, cioè

$$\begin{cases} y = 2x + \dfrac{x}{\ln x} & 0 < x < 1 \\ \\ y = 2x - \dfrac{x}{\ln x} & x > 1 \end{cases}$$

- Primo caso $y = 2x + \frac{x}{\ln x}$ per $0 < x < 1$.
- Intersezione con l'asse x

$$2x + \frac{x}{\ln x} = 0$$

  cioè

$$2x \ln x + x = 0 \qquad x(2\ln x + 1) = 0$$

$$x = 0 \ non\, acc \qquad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

  la funzione passerà quindi per il punto $A\left(\frac{1}{\sqrt{e}};0\right)$

- intersezione con l'asse y sarà vuota tenendo conto del campo di esistenza
- segno della funzione

$$2x + \frac{x}{\ln x} > 0$$

  tenendo conto della risoluzione dell'equazione e del campo di esistenza, si ha

$$y < 0 \quad per \quad \frac{1}{\sqrt{e}} < x < 1$$

$$y > 0 \quad per \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

- comportamento della funzione negli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\ln x+x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x+3}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\quad=\quad 0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x\ln x+x}{\ln x}=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{0^-}\right]\quad=\quad -\infty$$

eventuali asintoti obliqui

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x\,(2\ln x+1)}{x\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x}=2$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\frac{x\,(2\ln x+1)}{\ln x}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\ln x+x-2x\ln x}{\ln x}=\infty$$

non esistono pertanto asintoti obliqui

- crescenza e decrescenza

$$y^{'}=\frac{2\ln^2 x+\ln x-1}{\ln^2 x}>0$$

1. Numeratore positivo

$$N>0\quad 2\ln^2 x+\ln x-1>0$$

sostituendo $\ln x=t$, si ha

$$2t^2+t-1>0$$

per cui $t<-1\vee t>\frac{1}{2}$, cioè

$$\ln x>\frac{1}{2}\qquad x>\sqrt{e}\,fuori\,dal\,C.E.$$

$$\ln x<-1\qquad 0<x<\frac{1}{e}$$

2. Denominatore sempre positivo nel campo di esistenza; pertanto

$$y^{'}>0\quad crescente\,per\quad \frac{1}{e}<x<1$$

$$y^{'}<0\quad decrescente\,per\quad 0<x<\frac{1}{e}$$

avremo quindi un massimo $M\left(\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$

- concavità e flessi

$$y^{''}\;=\;\frac{\left(\frac{4\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)\ln^2 x-\frac{2\ln x}{x}\left(2\ln^2 x+\ln x-1\right)}{\ln^4 x}=$$

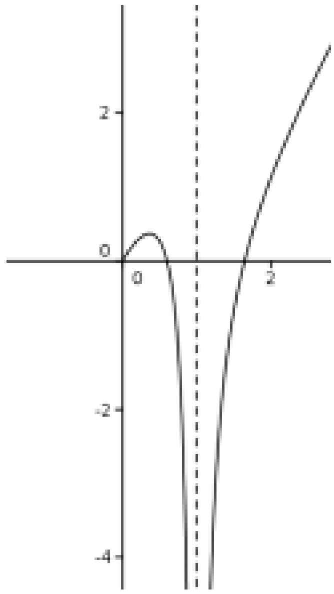
$$=\;\frac{\left(\frac{4\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)\ln x-\frac{2}{x}\left(2\ln^2 x+\ln x-1\right)}{\ln^3 x}$$

$$y^{''}\;=\;\frac{-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}}{\ln^3 x}=\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}$$

la derivata seconda si annulla per

$$x=e^2$$

- Grafico:



Applicazione dello studio di una funzione

Discussione grafica di un'equazione parametrica

Esercizio 45. Determinare, al variare del parametro, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - kx^2 + 2 - k = 0$$

Soluzione. Ricaviamo il parametro k:

$$-k\left(x^2+1\right) + x^3 + 2 = 0 \quad k = \frac{x^3+2}{x^2+1}$$

poniamo ora $y = k$ e avremo il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{x^3+2}{x^2+1} \\ y = k \end{cases}$$

rispondere al quesito vuol dire trovare le intersezioni tra la funzione in x e il fascio di rette parallele all'asse x.

Studiamo la funzione $y = \frac{x^3+2}{x^2+1}$

- Dominio: $D = \mathbb{R}$
- nessuna simmetria
- intersezioni

$$\begin{cases} y = \frac{x^3+2}{x^2+1} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^3+2}{x^2+1} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{-2} \\ y = 0 \end{cases}$$

- segno:

$$\begin{cases} Nun > 0 \\ Den > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{-2} & y > 0 \\ x = \forall x \in D & y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \sqrt[3]{-2} \\ x < \sqrt[3]{-2} \end{cases}$$

- comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x^2+1} = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2}{x^2+1} = +\infty$$

nessun asintoto orizzontale; verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^3+x} = 1 \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^2+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2+1} = 0$$

asintoto obliquo di equazione $y = x$

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$y' = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$$

(il polinomio di 3° grado si scompone facilmente con la regola di Ruffini) la derivata si annulla per $x = 0$ e $x = 1$

$$\begin{array}{lllll} Nun > 0 & x < 0 \vee x > 1 & y' > 0 & x < 0 \vee x > 1 & crescente \\ Den > 0 & \forall x \in D & y' < 0 & 0 < x < 1 & decrescente \end{array}$$

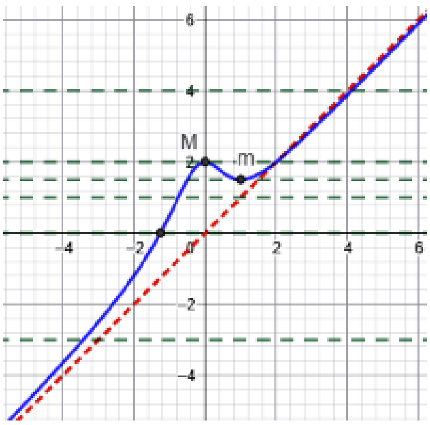
la funzione ha un minimo relativo in $m\left(1; \frac{3}{2}\right)$ e un massimo relativo in $M(0;2)$

- concavità, flessi

$$y" = \frac{(4x^3+6x-4)(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)(x^4+3x^2-4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(3x^3-6x^2-3x+2)}{(x^2+1)^3}$$

non si può scomporre con la regola di Ruffini, e gli zero sono valori approssimati che indichiamo con $x = -0,7$, $x = 0,4$ e $x = 2,3$. In questi punti si hanno i flessi.

- grafico della funzione e del fascio di rette (alcune)



- le soluzioni dell'equazione saranno:

1 soluzione per $k < \frac{3}{2}$ e per $k > 2$; 2 soluzioni per $\frac{3}{2} < k < 2$; una soluzione doppia e una semplice per $k = \frac{3}{2}$ e $k = 2$

Esercizio 46. Determinare per via grafica le soluzioni reali dell'equazione:

$$e^x - x^2 + 1 = 0$$

Soluzione. poniamo $y = e^x$ e avremo il sistema

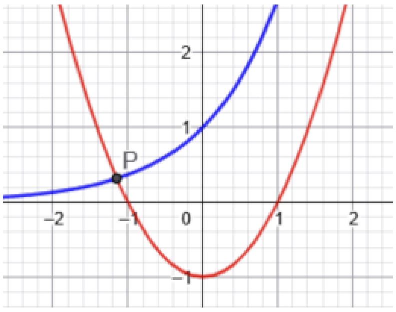
$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = e^x \end{cases}$$

le due funzioni sono entrambe note e rappresentabili direttamente. Infatti

$$y = x^2 - 1$$

è l'equazione di una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice in $V(0:-1)$; inoltre la parabola passa per i punti $A(-1;0)$ e $B(1;0)$ ed è simmetrica rispetto all'asse y, che è l'asse della parabola. La funzione e^x è la tipica funzione esponenziale passante per $(0;1)$ che si può disegnare per punti.

- grafico delle due funzioni



- la soluzione dell'equazione è data dall'ascissa del punto in comune tra le due curve, cioè il punto che, a parità di ascissa, è associato alla stessa ordinata. Il valore è $x \simeq -1,15$. (La soluzione è ottenibile mediante approssimazioni successive, prendendo ogni volta il punto medio dell'intervallo di variazione della x.

Esercizio 47. Determinare per via grafica le soluzioni reali dell'equazione:

$$\sqrt[3]{x^2} - \cos x = 0$$

Soluzione. poniamo $y = \sqrt[3]{x^2}$ e avremo il sistema

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = \sqrt[3]{x^2} \end{cases}$$

la funzioni coseno è immediatamente rappresentabile. Studiamo la funzione irrazionale

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

il dominio è $\mathbb{R}$; la funzione è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse y (come anche la funzione coseno); è sempre positiva e agli estremi del dominio tende a $+\infty$.

Calcoliamo la sua derivata

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

la funzione è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. Non è definita per $x = 0$ e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -\infty \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

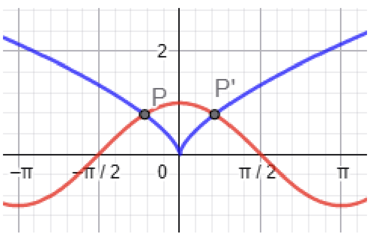
non ci sono max e minimi e si ha un punto di cuspide in $x = 0$.

La derivata seconda è

$$y" = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}}$$

per cui la funzione ha sempre concavità verso il basso.

- grafico delle due funzioni



- la funzione coseno ha codominio $[-1;1]$ e quindi basta considerare solo una cresta. Le intersezioni sono comprese tra $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{\pi}{4}$ e tra $-\frac{\pi}{5}$ e $-\frac{\pi}{4}$.

Esercizio 48. Dimostrare che l'equazione $x^5+x^3+2x-30=0$ ammette una sola soluzione e che questa è unica. Dimostrare inoltre che la soluzione x_0 è compresa tra 1 e 2.

Soluzione. Studiamo la funzione $y=x^5+x^3+2x-30$; essa ha dominio $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} x^5+x^3+2x-30=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^5+x^3+2x-30=+\infty$$

calcoliamo la derivata

$$y'=5x^4+3x^2+2$$

essa è sempre positiva e la funzione è sempre crescente e non ammette massimo e minimo. Ciò indica che il grafico della funzione incontra l'asse x in un solo punto.

Osserviamo che $f(1)=-26$ e $f(2)=-12$, essendo la funzione sempre crescente per il teorema di dell'esistenza degli zeri di una funzione, nell'intervallo $[1;2]$ esiste un punto x_0 per il quale $f(x_0)=0$.

Esercizio 49. Sia $r: y=mx+t$ una retta variabile nel piano xOy che intersechi i semipiani positivi x e y (o i semipiani negativi in A e B tali che il triangolo AOB abbia area uguale a 2. Trovare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del luogo γ del piede P della perpendicolare ad r. Studiare poi il luogo e tracciarne il grafico.

Soluzione. Troviamo le coordinate dei punti A e B

$$\begin{cases} y=mx+t \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=t \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} mx+t=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{t}{m} \\ y=0 \end{cases}$$

pertanto $A\left(-\frac{t}{m};0\right)$ e $B(0;t)$. L'area del triangolo è

$$A=\frac{t^2}{2|m|}=2$$

da cui

$$|m|=\frac{t^2}{4}$$

la perpendicolare da O è $y=\frac{1}{|m|}x$ per cui $y=\frac{t^2}{4}x$; le due rette si incontrano nel punto P cercato ottenendo le equazioni parametriche del luogo

$$\begin{array}{ll} \frac{t^2}{4}x+t=\frac{4}{t^2}x & x=\dfrac{4t^3}{t^4+16} \\ y=\frac{4}{t^2}\cdot\frac{4t^3}{t^4+16} & y=\dfrac{16t}{t^4+16} \end{array}$$

Troviamo ora l'equazione cartesiana: le eq. parametriche hanno in comune t^4+16 e uguagliandole si ottiene

$$\begin{array}{ll} (t^4+16)\,x=4t^3 & (t^4+16)\,y=16t \\ \frac{4t^3}{x}=\frac{16t}{y} & t^2=\dfrac{4x}{y} \end{array}$$

inoltre $t^4+16=\left(\frac{4x}{y}\right)^2+16$. Dalla forma parametrica di y si ricava $y\,(t^4+16)=16t$ ed elevando al quadrato

$$y^2\left(t^4+16\right)^2=256t^2$$

sostituendo t^2 si ha

$$y^2\left(\frac{16x^2}{y^2}+16\right)^2=\frac{1024x}{y}$$

svolgendo e semplificando si ha

$$\left(x^2+y^2\right)^2-4x=0$$

Per studiare la funzione è preferibile ragionare sulla forma parametrica piuttosto che su quella implicita cartesiana (studio approssimato)

Il dominio è $\forall t$; la funzione è dispari perché sostituendo $-t$ si ottiene

$$\begin{cases} x=-\dfrac{4t^3}{t^4+16} \\ y=-\dfrac{16t}{t^4+16} \end{cases}$$

interseca gli assi nel punto $O(0;0)$. Il limite per $t\to\infty$, è $x\to 0$ e $y\to 0$. Il punto $O(0;0)$ è una cuspide a tangente verticale.

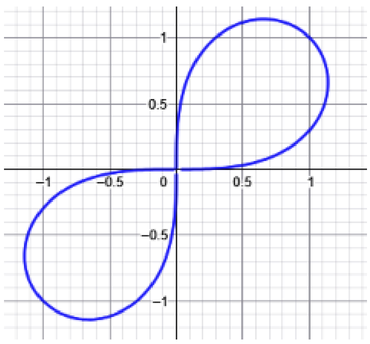
Calcoliamo la derivata

$$\frac{dx}{dt}=\frac{4t^2\left(48-t^4\right)}{\left(t^4+16\right)^2}\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{16\left(16-3t^4\right)}{\left(t^4+16\right)^2}$$

da cui

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4\left(3t^4-16\right)}{t^2\left(t^4-48\right)}$$

il numeratore si annulla per $t=\pm\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\simeq\pm 1,52$ e pertanto $x\simeq\pm 0,66$ e $y=\pm 1,14$.



Esercizio 50. Dopo aver determinato i coefficienti a,b,c affinché la curva di equazione

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$$

abbia per asintoto obliquo la retta $y=-2x+1$ e nel punto di ascissa 1 la retta tangente alla γ sia parallela alla bisettrice del II e IV quadrante, a) studiare le variazioni della funzione e tracciarne il grafico; b) determinare la retta normale a γ nel suo punto di ascissa 2.

Soluzione. Traduciamo le informazioni in relazioni matematiche. se la funzione ha l'asintoto obliquo indicato, allora

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x}=-2\qquad a=-2$$
$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+bx+c}{x+1}+2x=1\qquad b=-1$$

la funzione diviene ora

$$y=\frac{-2x^2-x+c}{x+1}$$

per trovare la tangente nel punto indicato, calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{(-4x-1)(x+1)+2x^2+x-c}{(x+1)^2} = -\frac{2x^2+4x+c+1}{(x+1)^2}$$

da cui, ricordando che due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare ($m=-1$ in questo caso)

$$y'(1) = -\tfrac{c+7}{4} = -1 \quad c=-3$$

la forma finale della funzione è

$$y = \frac{-2x^2-x-3}{x+1}$$

- dominio: $D=\mathbb{R}-\{-1\}$
- nessuna simmetria
- intersezioni

$$\begin{cases} y = \frac{-2x^2-x-3}{x+1} \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-2x^2-x-3}{x+1}=0 \\ y=0 \end{cases} \quad mai$$

- segno:

$$\begin{array}{llll} Num>0 & mai & x<-1 & positiva \\ Daltoen>0 & x>-1 & x>-1 & negativa \end{array}$$

- comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2-x-3}{x+1} = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2-x-3}{x+1} = -\infty$$

sappiamo dai dati che ammette un asintoto obliquo $y=-2x+1$; studiamo per asintoti verticali

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{-2x^2-x-3}{x+1} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{-2x^2-x-3}{x+1} = -\infty$$

asintoto verticale di equazione $x=-1$.

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$y' = \frac{-2x^2-4x+2}{(x+1)^2}$$

la derivata ha lo stesso dominio della funzione; si annulla per $x=-1\pm\sqrt{2}$

$$\begin{array}{ll} Num>0 & -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2} \\ Den>0 & x\neq-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y'>0 & -1-\sqrt{2}<x<-1 \vee -1<x<-1+\sqrt{2} & crescente \\ y'<0 & x<-1-\sqrt{2} \vee x>-1+\sqrt{2} & decrescente \end{array}$$

la funzione ammette un massimo relativo in $M\left(-1+\sqrt{2};3-4\sqrt{2}\right)$ e un minimo in $m\left(-1-\sqrt{2};4\sqrt{2}+3\right)$.

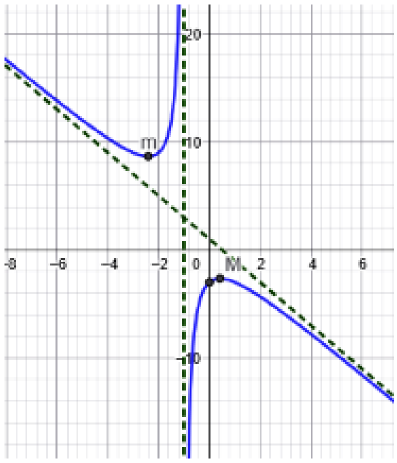
- concavità, flessi

$$y" = \frac{(-4x-4)(x+1)^2-2(x+1)\left(-2x^2-4x+2\right)}{(x+1)^4} = \frac{-8}{(x+1)^3}$$

$$\begin{array}{lll} y">0 & x<-1 & concavità\ verso\ l'alto \\ y"<0 & x>-1 & concavità\ verso\ il\ basso \end{array}$$

nessun flesso

- grafico:



b) troviamo la normale alla curva nel punto $P\left(2;-\frac{13}{3}\right)$. Abbiamo $y'(2)=-\frac{14}{9}$. La retta normale nel punto P è la perpendicolare alla tangente nel punto e ha $m=\frac{9}{14}$; la sua equazione è

$$y+\tfrac{13}{3}=\tfrac{9}{14}(x-2) \quad y=\frac{9}{14}x-\frac{118}{21}$$

Esercizio 51. Considera le funzioni di equazione

$$y=\frac{k\left(x^2-4\right)}{x^2+4}$$

a) Determina per quali valori di k le tangenti nei punti di intersezione con l'asse sono perpendicolari; b) traccia i grafici delle due funzioni corrispondenti ai valori di k trovati. Tra le due curve tracciate, considera solo quella corrispondente al valore positivo di k e scrivi l'equazione della circonferenza tangente alla curva γ nei suoi due punti di intersezione con l'asse x.

Soluzione. a) Troviamo i punti di intersezione in funzione di k

$$\begin{cases} k\left(x^2-4\right)=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad x=\pm 2 \quad A(-2;0), B(2;0)$$

calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y'=\frac{2kx\left(x^2+4\right)-2kx\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{16kx}{\left(x^2+4\right)^2}$$

calcoliamo il coefficiente angolare della tangente nei due punti

$$m_1=y'(-2)=-\frac{k}{2} \quad m_2=y'(2)=\frac{k}{2}$$

le due tangenti sono perpendicolari se $m_1\cdot m_2=-1$, per cui

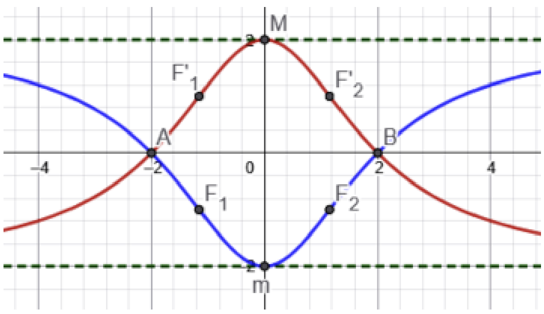
$$-\tfrac{k^2}{4}=-1 \quad k=\pm 2$$

b) le due funzioni diventano

$$y_1=-\frac{2\left(x^2-4\right)}{x^2+4} \quad y_2=\frac{2\left(x^2-4\right)}{x^2+4}$$

Le due funzioni sono simmetriche tra loro rispetto all'asse x. Basta quindi studiarne una. Scegliamo la y_2.

- Dominio: $D = \mathbb{R}$
- funzione pari (tutte le potenze della variabile x sono pari)
- intersezioni: $A(-2;0), B(2;0)$
- segno:
$$y > 0 \quad per\ x < -2 \vee x > 2 \quad y < 0 \quad per\ -2 < x < 2$$
- comportamento agli estremi del dominio
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2(x^2-4)}{x^2+4} = 2 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2(x^2-4)}{x^2+4} = 2$$
asintoto orizzontale $x = 2$
- crescenza, decrescenza, punti stazionari
$$y' = \frac{32x}{(x^2+4)^2}$$
$$y' > 0 \quad crescente\ per\ x > 0 \quad y' < 0 \quad decrescente\ per\ x < 0$$
minimo relativo in $m(0;-2)$.
- concavità, flessi
$$y" = \frac{32(x^2+4)^2 - 4x(x^2+4)(32x)}{(x^2+4)^3} = \frac{32(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$$
la derivata seconda si annulla per $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; il suo segno
$$y" > 0 \quad per\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad y < 0 \quad per\ x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
flessi: $F_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-1\right)$ e $F_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};-1\right)$
- grafico: tracciamo il grafico di entrambe le funzioni per quanto detto sopra



c) troviamo le normali alla curva γ nei punti A e B. Richiamando il calcolo iniziale, la tangente alla curva in A ha $m_A = -1$ e la tangente in B ha $m_B = 1$, per cui la normale alla curva in A è $m_{\perp A} = 1$ e quello in B $m_{\perp B} = -1$. Le equazioni sono

$$r_{\perp A} : y = x + 2 \quad r_{\perp B} : y = -x + 2$$

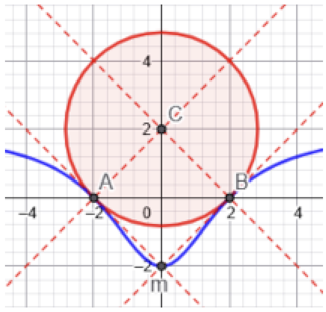
L'intersezione tra le due rette rappresenta il centro della circonferenza richiesta

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad C(0;2)$$

Equazione della circonferenza di centro C e di raggio $r = AC = BC = 2\sqrt{2}$

$$x^2 + (y-2)^2 = 8 \quad x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$$

- ambe le funzioni per quanto detto sopra



Esercizio 52. Considera la funzione $y = \ln\left(1 + a\cos^2 x\right)$. Determina per quali valori di a 1) è definita in $\mathbb{R}$; 2) non ha punti di flesso; 3) il suo grafico passa per il punto di coordinate $\left(\frac{\pi}{4}; \ln 2\right)$. In corrispondenza del valore di a trovato al punto 3) determina il periodo della funzione e tracciane il grafico nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e scrivi poi l'equazione della retta tangente nel punto di flesso di ascissa positiva appartenente all'intervallo dove è stato tracciato il grafico.

Soluzione. 1) La funzione è definita in $\mathbb{R}$ se

$$1 + a\cos^2 x > 0 \quad \cos x = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{a}} \quad a > -1$$

2) La funzione non ha punti di flesso

$$y' = \frac{-a\sin 2x}{1 + a\cos^2 x}$$

la derivata prima si annulla per $a = 0$ o per $x = 0, \pi$ (tralasciamo per ora la periodicità)

$$y" = \frac{-2a\cos 2x\left(1 + a\cos^2 x\right) - a^2\sin^2 2x}{\left(1 + a\cos^2 x\right)^2}$$

trasformiamo tutti gli angoli in $2x$, usando le formule di bisezione ($\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$)

$$y" = \frac{-2a\cos 2x - a^2\cos 2x - a^2\cos^2 2x - a^2 + a^2\cos^2 2x}{\left(1 + a\cos^2 x\right)^2} = \frac{-a\left(a+2\right)\cos 2x - a^2}{\left(1 + a\cos^2 x\right)^2}$$

il denominatore è sempre positivo; la derivata seconda si annulla se

$$\left(a+2\right)\cos 2x + a = 0 \quad \cos 2x = -\tfrac{a}{2+a}$$

Ora, l'espressione $-\frac{a}{2+a}$ appartiene all'intervallo $[-1; 1]$ solo per $a \geq 1$, quindi non avremo flessi per $a \leq -1$.

3) la curva passa nel punto indicato $\left(\frac{\pi}{4}; \ln 2\right)$; sostituiamo tali valori al posto di x e y:

$$\ln 2 = \ln\left(1 + \tfrac{a}{2}\right) \quad 2 = 1 + \tfrac{a}{2} \quad a = 2$$

La funzione che dobbiamo ora considerare è quella con $a = 2$, cioè

$$y = \ln\left(1 + 2\cos^2 x\right)$$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, per cui il periodo della funzione è $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Studiamo la funzione:

- dominio: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- intersezioni:

$$\begin{cases} y = \ln\left(1+2\cos^2 x\right) \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \ln 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln\left(1+2\cos^2 x\right) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

- segno: il coseno nel dominio è sempre positivo e quindi anche la funzione lo sarà perché il logaritmo è sempre positivo quando il suo argomento è > 1

- comportamento agli estremi: la funzione è definita e assume i valori

$$y\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

  non ci sono asintoti

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$y' = \frac{-2\sin 2x}{1+2\cos^2 x}$$

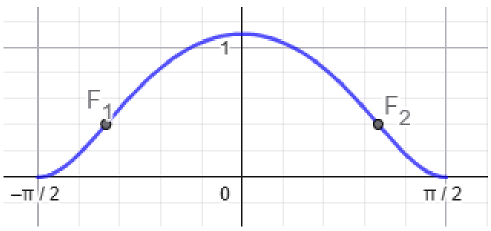
  la derivata prima si annulla per $x = 0$ e il suo segno (il denominatore è sempre positivo); il numeratore è positivo per $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ e negativo per $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Avremo quindi un massimo assoluto nel dominio $M\left(0;\ln 3\right)$.

- concavità, flessi

$$y" = \frac{-2\cos 2x\left(1+2\cos^2 x\right) - \left(-2\sin 2x\right)\left(-4\sin x\cos x\right)}{\left(1+2\cos^2 x\right)^2} = \frac{-4\left(2\cos 2x+1\right)}{\left(1+2\cos^2 x\right)^2}$$

  avremo due flessi nei punti $x = \pm\frac{\pi}{3}$.

- grafico:



troviamo l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa positiva,

$$\ln\left(1+2\cos^2\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2}$$

cioè $P\left(\frac{\pi}{3};\ln\frac{3}{2}\right)$. Il coefficiente angolare della retta lo ricaviamo dalla derivata nel caso di $x = \frac{\pi}{3}$, cioè

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-2\sin\frac{2}{3}\pi}{\frac{3}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

per cui

$$y - \ln\tfrac{3}{2} = -\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) \quad y = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi + \ln\frac{3}{2}$$

Esercizio 53. Considera la retta r passante per l'origine e di coefficiente angolare m. **a**) Scrivere l'equazione della retta s, simmetrica di r rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. **b**) Indicato con P il punto della retta r di ascissa 2, siano H la proiezione di P sulla retta s, K la proiezione di H sull'asse x ed R la proiezione di H sull'asse y, Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(m)$ che rappresenta l'area del rettangolo HKOR e tracciarne il grafico, in un sistema di assi mOy (si tralasci lo studio di y"). Studiare in particolare la derivabilità della funzione f. **c**) Scrivere l'equazione cartesiana del luogo descritto dal centro del rettangolo HKOR al variare della retta r.

Soluzione. **a**) La retta r ha equazione $r: y = mx$. La bisettrice del I e III quadrante ha equazione $y = x$. Applichiamo la trasformazione per la simmetria rispetto a tale bisettrice

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \qquad s: y = \frac{x}{m}$$

b) $P(2;2m) \in r$. Troviamo le coordinate di H che è il piede della perpendicolare alla retta s tracciata da P. La perpendicolare alla retta s ha coefficiente angolare$m_{\perp s} = -m$ e l'equazione è

$$y - 2m = -m(x-2) \qquad y = -mx + 4m$$

troviamo ora l'intersezione con la retta s

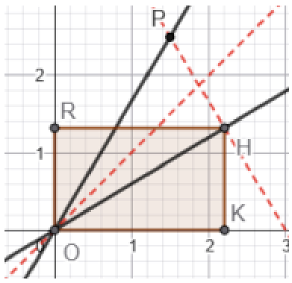
$$\begin{cases} y = \frac{x}{m} \\ y = -mx + 4m \end{cases} \qquad H \begin{cases} x = \frac{4m^2}{m^2+1} \\ y = \frac{4m}{m^2+1} \end{cases}$$

Le proiezioni di H sugli assi cartesiani danno $K\left(\frac{4m^2}{m^2+1};0\right)$ e $R\left(0;\frac{4m}{m^2+1}\right)$.

Troviamo l'area del rettangolo

$$A = \left(\frac{4m^2}{m^2+1}\right)\left(\frac{4m}{m^2+1}\right) = \frac{16m^3}{(m^2+1)^2}$$

Sotto una possibile figura che descrive la costruzione e il calcolo.



Studiamo ora la funzione nella variabile m

$$f(m) = \frac{16m^3}{(m^2+1)^2}$$

- Dominio: $D = \mathbb{R}$
- la funzione è dispari
- intersezioni $O(0;0)$
- segno: $f > 0$ per $x > 0$ e $f < 0$ per $x < 0$ (il denominatore è sempre positivo)
- comportamento agli estremi

$$\lim_{m\to-\infty} \frac{16m^3}{(m^2+1)^2} = 0 \qquad \lim_{m\to+\infty} \frac{16m^3}{(m^2+1)^2} = 0$$

asintoto orizzontale $f = 0$

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

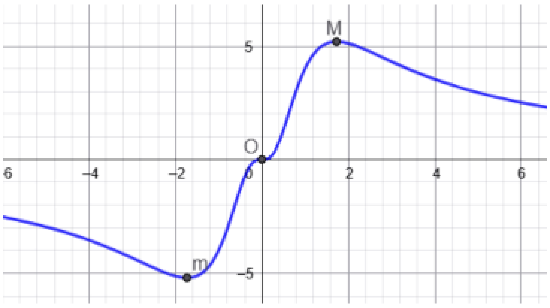
$$f' = \frac{48m^2\left(m^2+1\right)^2 - 4m\left(m^2+1\right)\left(16m^3\right)}{\left(m^2+1\right)^4} = \frac{16m^2\left(3-m^2\right)}{\left(m^2+1\right)^3}$$

la derivata prima si annulla per $m=0$ e $m=\pm\sqrt{3}$. Il denominatore è sempre positivo, per cui

$$\begin{array}{ll} f'>0 & -\sqrt{3}<x<0 \pm 0<x<\sqrt{3} \\ f'<0 & x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3} \end{array}$$

si ha $M\left(\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$, $m\left(-\sqrt{3};-3\sqrt{3}\right)$; in $x=0$ non funzione non cambia verso ed è definita, flesso a tangente orizzontale.

- grafico



c) il centro del rettangolo è il punto medio della diagonale OH (in figura). Le sue coordinate sono

$$M\begin{cases} x=\frac{2m^2}{m^2+1} \\ y=\frac{2m}{m^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=\frac{4m^4}{\left(m^2+1\right)^2} \\ y^2=\frac{4m^2}{\left(m^2+1\right)^2} \end{cases} \qquad x^2+y^2=\frac{4m^2\left(m^2+1\right)}{\left(m^2+1\right)^2} \qquad x^2+y^2-2x=0$$

Esercizio 54. Data una circonferenza di diametro $AB=2r$ si prenda su di essa, da parte opposta di AB, due punti C e D tali che

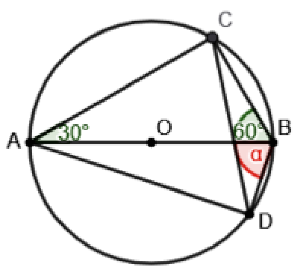
$$A\hat{B}C=\frac{\pi}{3} \quad A\hat{B}D=\alpha$$

Si consideri la funzione

$$\phi=\frac{\overline{AD}^2-\overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$$

espressa per mezzo di $x=\tan\alpha$ e se ne studi il grafico.

Soluzione. Disegniamo la figura



Il triangolo ABC è la metà di un triangolo equilatero di lato AB, per cui $BC = r$. Inoltre l'angolo $CAD = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{2}{3}\pi - \alpha$. Applichiamo i teoremi della trigonometria relativi ai triangoli rettangoli e il teorema della corda

$$AD = 2r\sin\alpha \quad BD = 2r\cos\alpha \quad CD = 2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right)$$

Riscriviamo la funzione $\phi(\alpha)$

$$\phi(\alpha) = \frac{4r^2\sin^2\alpha - 4r^2\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right)}{r^2} = 4\sin^2\alpha - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2$$

svolgendo il quadrato e sommando si ottiene

$$\phi(\alpha) = 3\sin^2\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha$$

Costruiamo la funzione rispetto a x dividendo tutto per $\cos^2\alpha$:

$$y(x) = \frac{3\tan^2\alpha - 2\sqrt{3}\tan\alpha - 3}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3}{1 + x^2}$$

Studiamo la funzione:

- Dominio: $D = \mathbb{R}$
- nessuna simmetria
- intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y = \frac{3x^2-2\sqrt{3}x-3}{1+x^2} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3x^2-2\sqrt{3}x-3}{1+x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

  le intersezioni sono $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$, $B\left(\sqrt{3}; 0\right)$, $C(0; -3)$.

- segno: il numeratore è sempre positivo

$$\begin{array}{ll} y > 0 & x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y < 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

- comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-2\sqrt{3}x-3}{1+x^2} = 3 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2\sqrt{3}x-3}{1+x^2} = 3$$

  asintoto orizzontale $y = 3$

- crescenza, decrescenza, punti stazionari

$$y' = \frac{\left(6x - 2\sqrt{3}\right)(x^2+1) - 2x\left(3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3\right)}{(x^2+1)^2} = \frac{2\left(\sqrt{3}x^2 + 6x - \sqrt{3}\right)}{(x^2+1)^2}$$

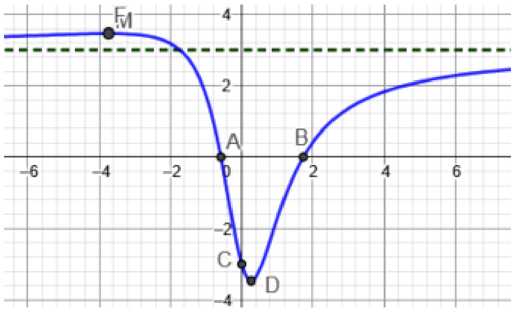
  il denominatore della derivata è ancora sempre positivo

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & x < -\left(2+\sqrt{3}\right) \vee x > 2 - \sqrt{3} \\ y' < 0 & -\left(2+\sqrt{3}\right) < x < 2 - \sqrt{3} \end{array}$$

  si ha un massimo relativo $M\left(-2-\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$ e un minimo relativo $m\left(2-\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right)$.

- trascuriamo la derivata secondo (di terzo grado)

- grafico:



Esercizio 55. Studiare la funzione seguente e tracciarne il grafico

$$y=\sqrt{-\ln\frac{2x+5}{9}}$$

Soluzione. applicando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo la funzione nella forma

$$y=\sqrt{\ln\left(\frac{2x+5}{9}\right)^{-1}}=\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}$$

- **Campo di Esistenza**: la radice quadrata esiste se il radicando non è negativo; il logaritmo esiste se il suo argomento è maggiore di zero

$$\begin{cases}\ln\frac{9}{2x+5}\geq 0\\ \frac{9}{2x+5}>0\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{9}{2x+5}\geq 1\\ \frac{9}{2x+5}>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{4-2x}{2x+5}\geq 0\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}N\geq 0\,x\leq 2\\ D>0\,x>-\frac{5}{2}\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\frac{5}{2}<x\leq 2\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases}\qquad C.E:-\frac{5}{2}<x\leq 2$$

- **Intersezioni con assi**: calcoliamo le intersezioni con l'asse x

$$\begin{cases}\ln\frac{9}{2x+5}=0\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{9}{2x+5}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\qquad P\,(2;0)$$

intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases}x=0\\ y=\ln\frac{9}{5}\end{cases}\qquad Q\left(0;\ln\frac{9}{5}\simeq 0.6\right)$$

- **Asintoti**: calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}=+\infty\qquad\lim_{x\to 2}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}=0$$

avremo un asintoto verticale di equazione $x=-\frac{5}{2}$

- **Segno della funzione**: studiamo dove la funzione assume valori positivi e negativi

$$\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}>0\qquad\forall x\in C.E.$$

la funzione sarà quindi sempre positiva

- **Punti stazionari, crescenza e decrescenza**: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y' = \frac{\frac{2x+5}{9} \cdot \frac{-18}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}} \qquad y' = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}$$

la derivata prima non si annulla mai e quindi la funzione è sempre crescente.

- **Flessi**: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = \frac{-2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}} - (2x+5)\frac{\frac{2x+5}{9}\cdot\frac{-18}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}} \qquad y" = \frac{-2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}} + \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}}$$

$$y" = \frac{-2\ln\frac{9}{2x+5}+1}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}$$

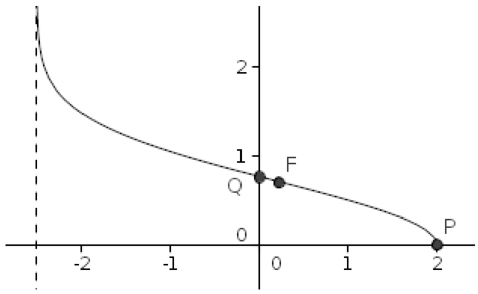
la derivata seconda si annulla se

$$-2\ln\frac{9}{2x+5}+1=0 \qquad \ln\frac{9}{2x+5}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{2x+5}=\sqrt{e} \qquad x=\frac{9-5\sqrt{e}}{2\sqrt{e}} \simeq 0.23$$

la funzione avrà un flesso nel punto $F\left(\frac{9-5\sqrt{e}}{2\sqrt{e}}; \sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0.71\right)$. Infatti $F_y = \sqrt{\ln\left(\frac{9}{\frac{9-5\sqrt{e}}{\sqrt{e}}+5}\right)} = \ln\frac{9\sqrt{e}}{9} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

- **Rappresentazione grafica**: ecco il grafico della funzione



Esercizio 56. Tracciare il grafico della funzione

$$y = e^{x+1} - \ln|x+1|$$

- **Campo di Esistenza**: la funzione esponenziale è sempre definita, mentre il logaritmo esiste se

$$x+1 \neq 0 \qquad x \neq -1$$

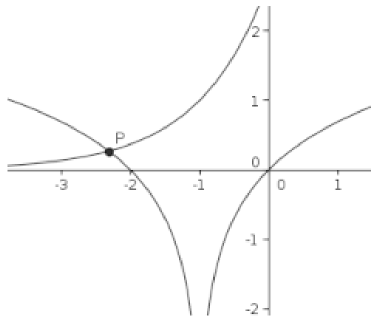
- La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani e all'origine. La funzione non è, infatti, né pari né dispari

- **Intersezioni con assi**: intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e \end{cases} \qquad A(0;e)$$

$$\begin{cases} e^{x+1} = \ln|x+1| \\ y = 0 \end{cases} \qquad P(\alpha;0)$$

risolviamo l'equazione graficamente, rappresentando i due membri due funzioni elementari: e^{x+1} è la funzione e^x traslata verso sinistra di 1, mentre $\ln|x+1|$ è la funzione logaritmica traslata verso destra di 1 e poi estesa con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ordinate



la soluzione può essere espressa con $x = \alpha$, dove $-3 < \alpha < -2$.

- **Segno**: il grafico sopra consente anche di discutere il segno della funzione, che si ottiene risolvendo la disequazione $e^{x+1} > \ln|x+1|$. In particolare, $y > 0$ per $x > \alpha$ e $y < 0$ per $x < \alpha$.

- **Asintoti**: calcoliamo i seguenti quattro limiti

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x+1} - \ln(-x-1) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{x+1} - \ln(x+1) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} e^{x+1} - \ln(-x-1) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} e^{x+1} - \ln(x+1) = +\infty$$

la funzione avrà un asintoto verticale di equazione $x = -1$. Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui, essendone verificata la condizione necessaria

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1} - \ln(-x-1)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1} - \ln(-x-1)}{x} = +\infty$$

non vi sono asintoti obliqui.

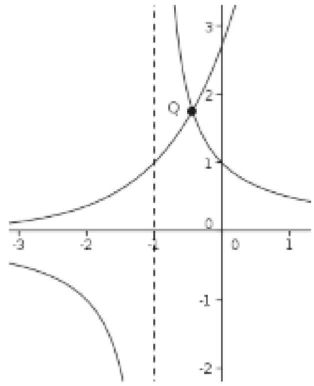
- **Crescenza, decrescenza, punti stazionari**: calcoliamo la derivata prima, ricordando che se $y = \ln|x|$, $y' = \frac{1}{x}$

$$y' = e^{x+1} - \frac{1}{x+1}$$

la derivata non esiste per $x = -1$, quindi ha lo stesso campo di esistenza della funzione. Studiamo il segno della derivata

$$e^{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$$

anche in questo caso risolviamo graficamente, essendo il secondo membro un'iperbole traslata



La figura mostra che la funzione esponenziale è maggiore dell'iperbole per $x > \beta$, con $-1 < \beta < 0$. Avremo quindi

$$\begin{aligned} y' &> 0 \quad per \quad x < -1 \vee x > \beta \\ y' &= 0 \quad per \quad x = \beta \\ y' &< 0 \quad per \quad -1 < x < \beta \end{aligned}$$

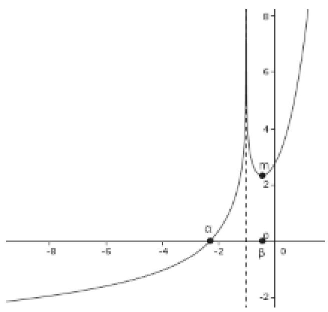
la funzione sarà quindi crescente per $x < -1$ e $x > \beta$, decrescente per $-1 < x < \beta$ e avrà un punto di minimo relativo per $x = \beta$.

- **Flessi**: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = e^{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

  anche la derivata seconda non è definita per $x = -1$, ma sarà sempre positiva, quindi la funzione avrà concavità sempre rivolta verso l'alto, senza la presenza di flessi.

- **Grafico**: la figura mostra il grafico della funzione data



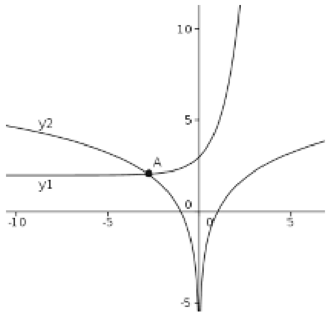
Esercizio 57. Risolvere la disequazione

$$\frac{\ln x^2 - e^x - 2}{e^x + x^2 - 4} \leq 0$$

Soluzione. Il logaritmo esiste se $x \neq 0$. Studiamo separatamente il numeratore e denominatore della frazione data

$$N \geq 0 \qquad \ln x^2 \geq e^x + 2$$

risolviamo graficamente ponendo $y_1 = \ln x^2$ e $y_2 = e^x + 2$, dovrà essere $y_1 \geq y_2$.



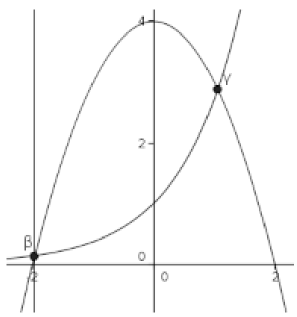
Avremo quindi

$$N \geq 0 \quad per \quad x > \alpha \;\; -3 < \alpha < -2$$

Studiamo allo stesso modo il denominatore

$$D > 0 \qquad e^x > 4 - x^2$$

poniamo $y_1 = e^x$ e $y_2 = 4 - x^2$, dovrà essere $y_1 > y_2$.

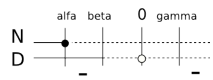


Avremo

$$\begin{array}{rl} D > 0 \quad per & x < \beta \vee x > \gamma \\ -2 < \beta < -1 & 1 < \gamma < 2 \end{array}$$

Osservando che $\alpha < \beta < \gamma$, avremo le seguenti soluzioni

$$\alpha \leq x \leq \beta \qquad x > \gamma$$



Esercizio 58. Risolvere l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^{3x} \arctan e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

Soluzione. Applichiamo la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \ln t$ e $dx = \frac{1}{t}$ e avremo

$$\int \frac{t^3 \arctan t}{1+t^2} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2 \arctan t}{1+t^2} dt$$

riscriviamo il numeratore

$$\int \frac{(t^2+1-1)\arctan t}{1+t^2} dt = \int \arctan t dt - \int \frac{\arctan t}{1+t^2} dt =$$

risolviamo il primo integrale per parti,

$$= t \arctan t - \int \frac{t}{1+t^2} dt - \int \arctan t \cdot d(\arctan t) =$$

$$= t \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt - \frac{\arctan^2 t}{2} = t \arctan t - \frac{1}{2} \ln\left|1+t^2\right| - \frac{\arctan^2 t}{2}$$

infatti $\left(\int \frac{2t}{1+t^2} dt = \int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln|f(t)|\right)$. Sostituendo il valore di x, otteniamo

$$\int \frac{e^{3x} \arctan e^x}{1+e^{2x}} dx = e^x \arctan e^x - \frac{1}{2} \ln\left(1+e^{2x}\right) - \frac{1}{2} \arctan^2 e^x + C$$

Esercizio 59. Determinare l'insieme di definizione, la natura dei punti di frontiera e le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)-9}{(x-1)(y-e^x)}}$$

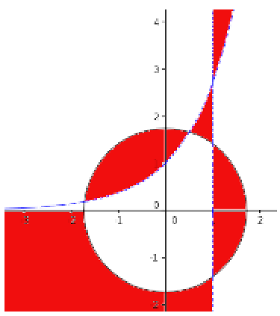
possiamo riscrivere la funzione applicando le semplici regole algebriche dei prodotti notevoli

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(x^2+y^2+3)(x^2+y^2-3)}{(x-1)(y-e^x)}}$$

e osservare che il fattore (x^2+y^2+3) al numeratore è sempre positivo. L'insieme di definizione sarà calcolabile tramite il sistema che contiene le condizioni che rendono il radicando non negativo e il denominatore della frazione non nullo

$$\begin{cases} 1^a & \frac{(x^2+y^2-3)}{(x-1)(y-e^x)} \geq 0 \\ 2^a & x-1>0 \\ 3^a & y-e^x>0 \end{cases}$$

studiamo graficamente le tre disequazioni e



le soluzioni comuni: il polinomio x^2+y^2-3numeratore può essere rappresentato come una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$ e centrata nell'origine; $x-1$ è una retta parallela all'asse y e $y-e^x$ è la funzione esponenziale, sempre positiva

i punti di intersezione della circonferenza con la retta e l'esponenziale sono da considerarsi esclusi.

Calcoliamo le derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2\right)^2-9}{(x-1)(y-e^x)}}}\cdot\frac{4x\left(x^2+y^2\right)(x-1)(y-e^x)-[(y-e^x-e^x(x-1))]\left[\left(x^2+y^2\right)^2-9\right]}{(x-1)^2(y-e^x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2\right)^2-9}{(x-1)(y-e^x)}}}\cdot\frac{4y\left(x^2+y^2\right)(x-1)(y-e^x)-(x-1)\left[\left(x^2+y^2\right)^2-9\right]}{(x-1)^2(y-e^x)^2}$$

Esercizio 60. Studiare l'andamento e tracciare il grafico della funzione $y=\sqrt[3]{\ln^2|x-1|}$

Soluzione. Campo di Esistenza: la radice cubica esiste sempre, mentre il logaritmo solo se il suo argomento è diverso da zero, cioè

$$x\neq 1 \qquad (-\infty;1)\cup(1;+\infty)$$

la presenza del modulo implica che si studi la funzione

$$y=\begin{cases}\sqrt[3]{\ln^2(x-1)} & x>1\\ \sqrt[3]{\ln^2(1-x)} & x<1\end{cases}$$

1°) Studio della funzione $y=\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}$ nell'intervallo $(-\infty;1)$

Intersezioni con gli assi: asse y: $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

Segno: $y\geq 0$ per ogni x appartenente all'intervallo (il logaritmo è infatti sempre positivo)

Asintoti: calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to-\infty}y=+\infty \qquad \lim_{x\to1^-}y=+\infty$$

avremo quindi un asintoto verticale di equazione $x=1$. L'asintoto obliquo non esiste in quanto

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=0$$

Crescenza, decrescenza, punti stazionari: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y'=\frac{2}{3}\ln^{-\frac{1}{3}}(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}=\frac{2}{3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(1-x)}$$

C.E della derivata: $x\neq 1,0$. Per studiare il segno della derivata prima, basta considerare il denominatore $3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(1-x)>0$ nell'intervallo $x<1$

$$\begin{array}{lll}1^\circ\,fattore<0 & & \forall x<1\\ 2^\circ\,fattore<0 & \ln^{\frac{1}{3}}(1-x)<0 & x>0\end{array}$$

avremo quindi $y'>0$ per $0<x<1$ e la funzione sarà crescente; $y'<0$ per $x<0$ e la funzione sarà decrescente. Studiamo la derivata nel punto $x=0$ nei due intervalli, in quanto la derivata non è definita per $x=0$.

$$\lim_{x\to0^-}y'=-\infty \qquad \lim_{x\to0^+}y'=+\infty$$

Il punto $(0;0)$ è punto di cuspide e minimo assoluto.
Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\left[\ln^{\frac{1}{3}}(1-x) + \frac{1}{3}(x-1)\ln^{-\frac{2}{3}}(1-x) \cdot \frac{1}{x-1}\right]}{(x-1)^2 \ln^{\frac{2}{3}}(1-x)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3\ln(1-x)+1}{(x-1)^2 \ln^{\frac{4}{3}}(1-x)}$$

studiamo il segno della derivata seconda attraverso il segno del suo numeratore, essendo il denominatore sempre positivo

$$\begin{aligned} y" \geq 0 \qquad & 3\ln(1-x)+1 \leq 0 \\ & \ln(1-x) \leq -\frac{1}{3} \\ & x \geq 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}} \sim 0,28 \end{aligned}$$

La funzione presenta una concavità verso il basso negli intervalli $x < 0$ e $0 < x < 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}}$; presenta concavità verso l'alto nell'intervallo $1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}} < x < 1$. Avremo, quindi, un flesso ascendente $F_1\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}}; \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$.

2°) Studio della funzione $y = \sqrt[3]{\ln^2(x-1)}$ nell'intervallo $(1;+\infty)$
Intersezioni con gli assi: asse y: $\begin{cases} 0 = \ln^2(x-1) \\ y = 0 \end{cases}$,da cui $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$
Segno: $y \geq 0$ per ogni x appartenente all'intervallo (il logaritmo è infatti sempre positivo)
Asintoti: calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to 1^+} y = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} y = +\infty$$

avremo quindi un asintoto verticale di equazione $x = 1$. L'asintoto obliquo non esiste in quanto

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{y}{x} = 0$$

Crescenza, decrescenza, punti stazionari: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y' = \frac{2}{3}\ln^{-\frac{1}{3}}(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{2}{3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(x-1)}$$

C.E della derivata: $x \neq 1, 2$. Per studiare il segno della derivata prima, basta considerare il denominatore $3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(x-1) > 0$ nell'intervallo $x < 1$

$$\begin{array}{lll} 1° \, fattore > 0 & & \forall x > 1 \\ 2° \, fattore > 0 & \ln^{\frac{1}{3}}(x-1) > 0 & x > 2 \end{array}$$

avremo quindi $y' > 0$ per $x > 2$ e la funzione sarà crescente; $y' < 0$ per $1 < x < 2$ e la funzione sarà decrescente. Studiamo la derivata nel punto $x = 2$ nei due intervalli, in quanto la derivata non è definita per $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} y' = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} y' = +\infty$$

Il punto $(2;0)$ è punto di cuspide e minimo assoluto.
[Studio dei punti di non derivabilità. Si ha un

- punto angoloso: è un punto del dominio di una funzione in cui esistono entrambe le derivate destra e sinistra, ma sono diverse ed almeno una di esse ha valore finito;

- una cuspide: se i limiti destro e sinistro della derivata prima tendono a $\pm\infty$ con segno opposto.

1. flesso a tangente verticale: punto in cui la funzione è definita e il limite della derivata prima in quel punto diverge]

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

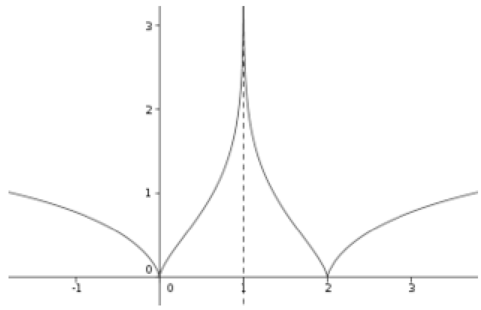
$$y" = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\left[\ln^{\frac{1}{3}}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)\ln^{-\frac{2}{3}}(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}\right]}{(x-1)^2 \ln^{\frac{2}{3}}(x-1)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3\ln(x-1)+1}{(x-1)^2 \ln^{\frac{4}{3}}(x-1)}$$

studiamo il segno della derivata seconda attraverso il segno del suo numeratore, essendo il denominatore sempre positivo

$$y" \geq 0 \qquad 3\ln(x-1)+1 \leq 0$$
$$\ln(x-1) \leq -\frac{1}{3}$$
$$x \leq 1+\sqrt[3]{\frac{1}{e}} \sim 1,71$$

La funzione presenta una concavità verso il basso negli intervalli $1+\sqrt[3]{\frac{1}{e}} < x < 2$ e $x > 2$; presenta concavità verso l'alto nell'intervallo $1 < x < 1+\sqrt[3]{\frac{1}{e}}$. Avremo, quindi, un flesso discendente $F_2\left(1+\sqrt[3]{\frac{1}{e}}; \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$.

Grafico della funzione:



Esercizio 61. Determinare l'insieme di definizione, classificare i punti di discontinuità, eliminandoli dove possibile, e studiare la funzione

$$y = \frac{|\ln|x||}{(2+\ln|x|)^2}$$

Soluzione. funzione trascendente fratta; l'insieme di definizione si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \ln|x| \neq -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm e^{-2} \end{cases}$$

avremo quindi $C.E: \left(-\infty; -e^{-2}\right) \cup \left(-e^{-2}; 0\right) \cup \left(0; e^{-2}\right) \cup \left(e^{-2}; +\infty\right)$

Discontinuità: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità per poterli classificare

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} y = (H\hat{o}p) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x}{2(2+\ln|x|)} = 0^+ \quad \textit{eliminabile} \quad y = \begin{cases} \frac{|\ln|x||}{(2+\ln|x|)^2} & per \quad x \neq 0, \pm e^{-2} \\ 0 & per \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \pm e^{-2}} y = +\infty \qquad 2^a \; specie$$

avremo due asintoti verticali di equazione $x = \pm e^{-2}$.

Simmetrie: la funzione è simmetrica rispetto all'asse y, in quanto $f(-x)=f(x)$. Ciò consente di studiare la funzione solo per $x>0$.

Intersezioni assi: essendo $x\neq 0$, non vi sono intersezioni con l'asse y;

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Segno: la funzione è sempre positiva nel $C.E.$

Asintoti orizzontali: calcoliamo gli altri limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{(2+\ln x)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{(2+t)^2}=0^+$$

avremo un asintoto orizzontale di equazione $y=0$.

Crescenza e decrescenza: la funzione, contenendo pure il modulo del logaritmo, deve essere studiata in due diversi intervalli

$$\begin{array}{ll} y_1=\dfrac{\ln x}{(2+\ln x)^2} & per \quad x\geq 1 \\ y_2=-\dfrac{\ln x}{(2+\ln x)^2} & per \quad 0<x<e^{-2}\; e^{-2}<x\leq 1 \end{array}$$

calcoliamo la derivata prima di y_1

$$y_1'=\frac{\frac{1}{x}(2+\ln x)^2-\frac{2}{x}(2+\ln x)\ln x}{(2+\ln x)^4}=\frac{2-\ln x}{x(2+\ln x)^3}$$

Il $C.E.$ della derivata coincide con quello di y_1. Studiamo il segno della derivata

$$\begin{array}{lll} N\geq 0 & 2>\ln x & x<e^2 \\ D>0 & x(2+\ln x)^3 & \forall x>0 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{ll} y'>0 & x<e^2 \\ y'<0 & x>e^2 \end{array}$$

e quindi $x=e^2$ sarà un massimo assoluto. Inoltre

$$\begin{array}{rcl} y_1\left(e^2\right) & = & \dfrac{1}{8} \\ y_1'(1) & = & \dfrac{1}{4} \end{array}$$

Calcoliamo la derivata prima di y_2

$$y_2'=\frac{\ln x-2}{x(2+\ln x)^3}$$

il cui $C.E.: \left(0;e^{-2}\right)\cup\left(e^2;1\right]$. Studiamo il suo segno, tenendo conto che y_2' non è mai nulla per $x\leq 1$.

$$\begin{array}{lll} N>0 & \ln x>2 & mai \\ D>0 & x(2+\ln x)^3 & x>e^{-2} \end{array}$$

avremo quindi

$$\begin{array}{lll} y_2'>0 & 0<x<e^{-2} & f\ crescente \\ y_2'<0 & e^{-2}<x>1 & f\ decrescente \end{array}$$

inoltre

$$y_2'(1) = -\frac{1}{2}$$

per $x = 1$ le due derivate sono diverse e $x = 1$ è, quindi, un punto angoloso e minimo assoluto.

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} y_2' = +\infty$$

e per la simmetria della funzione rispetto all'asse delle y, $x = 0$ è un punto di cuspide.

Concavità: calcoliamo le due derivate seconde

$$y"_1 = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x\,(2+\ln x)^3 - \left[(2+\ln x)^3 + 3x\,(2+\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\right](2-\ln x)}{x^2\,(2+\ln x)^6} =$$
$$= \frac{(2+\ln x)^2\,[-2-\ln x-(2+\ln x)(2-\ln x)-6+3\ln x]}{x^2\,(2+\ln x)^6}$$

$$y"_1 = \frac{\ln^2 x + 2\ln x - 12}{x^2\,(2+\ln x)^6}$$

la derivata seconda si annulla quando è nullo il numeratore

$$\ln^2 x + 2\ln x - 12 = 0 \qquad \ln x = -1 \pm \sqrt{13}$$

per cui, $x = e^{\sqrt{13}-1}$ è un punto di flesso; inoltre

$$\begin{array}{lll} y"_1 > 0 & x > e^{\sqrt{13}-1} & concavità\,verso\,l'alto \\ y"_1 < 0 & 1 \le x < e^{\sqrt{13}-1} & concavità\,verso\,il\,basso \end{array}$$

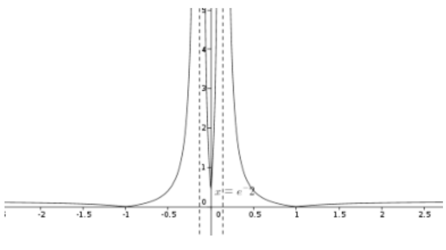
Studiamo ora la derivata nell'altro intervallo, cioè quella indicata come $y"_2$, con calcolo analogo, si ottiene

$$y"_2 = \frac{-\ln^2 x - 2\ln x + 12}{x^2\,(2+\ln x)^6}$$

per cui $y"_2 = 0$ per $x = e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)}$ che sarà un ulteriore punto di flesso; inoltre

$$\begin{array}{lll} y"_2 > 0 & e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)} < x < 1 & concavità\,verso\,l'alto \\ y"_2 < 0 & x < e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)} & concavità\,verso\,il\,basso \end{array}$$

Grafico: rappresentiamo la funzione completa tenendo conto della simmetria inizialmente indicata



con questa scala non è possibile indicare il massimo relativo per $x = e^2$

Esercizio 62. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione

$$\frac{|4-e^x|-1}{\sqrt{e^x-1}} \ge -\frac{1}{3}$$

Soluzione. possiamo riscrivere la disequazione nel seguente modo

$$\frac{|4-e^x|-1}{\sqrt{e^x-1}}+\frac{1}{3}\geq 0 \qquad \frac{3\left(|4-e^x|-1\right)+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}}\geq 0$$

la disequazione ha significato nel campo reale se il denominatore è maggiore di zero, cioè

$$C.E: \quad e^x>1 \quad x>0$$

Data tale condizione, il denominatore risulta sempre positivo e basta studiare il segno del numeratore nei due casi ottenibili studiando il valore assoluto

$$\begin{array}{lll} 1° & 4-e^x>0 & 0<x\leq \ln 4 \\ 2° & 4-e^x<0 & x\geq \ln 4 \end{array}$$

1° caso: $0<x<\ln 4$. La disequazione diviene

$$\frac{12-3e^x-3+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}}\geq 0$$

$$12-3e^x-3+\sqrt{e^x-1}>0 \qquad \sqrt{e^x-1}>3e^x-9$$

risolviamo la disequazione irrazionale mediante i due sistemi

$$\begin{cases} e^x-3\leq 0 \\ e^x-1>0 \end{cases} \cup \begin{cases} e^x-3\geq 0 \\ e^x-1\geq (3e^x-9)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq \ln 3 \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq \ln 3 \\ 9e^{2x}-55e^x+82\leq 0 \end{cases}$$

$$0<x\leq \ln 3 \qquad \begin{cases} x\geq \ln 3 \\ \ln\frac{55-\sqrt{73}}{18}\leq x\leq \ln\frac{55+\sqrt{73}}{18} \end{cases}$$

$$0<x\leq \ln 3 \qquad \ln 3\leq x\leq \ln\frac{55+\sqrt{73}}{18}$$

la soluzione in questo primo caso sarà pertanto $0<x\leq \ln\frac{55+\sqrt{73}}{18}$.

2° caso: $x\geq \ln 4$, la disequazione diviene

$$\frac{-12+3e^x-3+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}}\geq 0$$

il numeratore sarà positivo quando

$$-12+3e^x-3+\sqrt{e^x-1}\geq 0 \qquad \sqrt{e^x-1}\geq 15-3e^x$$

risolviamo la disequazione irrazionale mediante i due sistemi

$$\begin{cases} 15-3e^x\leq 0 \\ e^x-1>0 \end{cases} \cup \begin{cases} 5-e^x\geq 0 \\ e^x-1\geq 9\left(25+e^{2x}-10e^x\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq \ln 5 \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq \ln 5 \\ 9e^{2x}-91e^x+226\leq 0 \end{cases}$$

$$x\geq \ln 5 \qquad \ln\frac{91-\sqrt{145}}{18}\leq x\leq \ln 5$$

la soluzione in questo primo caso sarà pertanto $x\geq \ln\frac{91-\sqrt{145}}{18}$.

La disequazione sarà pertanto verificato negli intervalli

$$0<x\leq \ln\frac{55+\sqrt{73}}{18} \qquad x\geq \ln\frac{91-\sqrt{145}}{18}$$

Esercizio 63. Tracciare il grafico della funzione

$$y = xe^{-\ln^2 x + |\ln x|}$$

Soluzione. Campo di Esistenza: la funzione esponenziale ha il campo di esistenza del suo esponente; in questo caso, dovendo esistere il logaritmo, avremo $x > 0$ oppure $(0; +\infty)$.

Intersezioni con assi: per il campo di esistenza non vi sono intersezioni con l'asse x, mentre per le intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} -\ln^2 x + |\ln x| = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln x (\ln x \pm 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Non esistono simmetrie.

Segno: nel campo di esistenza la funzione risulta sempre non negativa, cioè $y \geq 0 \ \forall x \in C.E.$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi di campo di esistenza

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-\ln^2 x + |\ln x|} =$$

sostituendo $t = \ln x$, da cui $x = e^t$, avremo

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t^2 + t + |t|} \approx \lim_{x \to +\infty} e^{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{-\ln^2 x + |\ln x|} = \lim_{t \to -\infty} e^{-t^2 + t + |t|} \approx \lim_{t \to -\infty} e^{-t^2} = 0^+$$

Avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Crescenza, decrescenza: la presenza del modulo richiede di considerare la funzione nei due intervalli

$$\|\ln x\| \quad = \quad \begin{matrix} \ln x & x \geq 1 \\ -\ln x & 0 < x \leq 1 \end{matrix}$$

1° caso: $x \geq 1$, la funzione diviene

$$y_1 = xe^{-\ln^2 x + \ln x}$$

e $y_1(1) = 1$; calcoliamo la derivata prima

$$y_1' = e^{-\ln^2 x + \ln x} + xe^{-\ln^2 x + \ln x} \left(\frac{-2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) = 2e^{-\ln^2 x + \ln x} (1 - \ln x)$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione y_1. Inoltre, $y_1'(1) = 2$

Studiamo il segno della derivata, ricordando che l'esponenziale è sempre positivo

$$\begin{matrix} y_1' \geq 0 & 1 - \ln x \geq 0 & 1 \leq x \leq e \ f \ \textit{crescente} \\ y_1' \leq 0 & 1 - \ln x \leq 0 & x \geq e \ f \ \textit{decrescente} \end{matrix}$$

avremo quindi un massimo relativo per $x = e$. Studiamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y"_1 &= 2e^{-\ln^2 x + \ln x} \left(\frac{-2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) (1 - \ln x) + 2e^{-\ln^2 x + \ln x} \left(-\frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{2e^{-\ln^2 x + \ln x}}{x} \ln x (2\ln x - 3) \end{aligned}$$

Nel campo di esistenza l'esponenziale, il logaritmo e il denominatore sono sempre positivi, per cui

$$\begin{matrix} y"_1 \geq 0 & 2\ln x - 3 \geq 0 & x \geq e^{\frac{3}{2}} \ f \ \textit{concava} \\ y"_1 \leq 0 & 2\ln x - 3 \leq 0 & 1 \leq x \leq e^{\frac{3}{2}} \ f \ \textit{convessa} \end{matrix}$$

avremo quindi un flesso di tangente obliqua per $x = e^{\frac{3}{2}}$.

2° caso: $0 < x \leq 1$, la funzione diventa

$$y_2 = xe^{-\ln^2 x - \ln x}$$

e $y_2(1) = 1$; calcoliamo la derivata prima

$$y_1' = e^{-\ln^2 x - \ln x} + xe^{-\ln^2 x - \ln x}\left(\frac{-2\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = -2\ln x \cdot e^{-\ln^2 x + \ln x}$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione y_2. Inoltre, $y_1'(1) = 0$. Per $x = 1$ avremo, quindi, un punto angoloso. Calcoliamo il limite della derivata nell'estremo sinistro dell'intervallo

$$\lim_{x \to 0^+} -2\ln x \cdot e^{-\ln^2 x + \ln x} = 0$$

e per $x = 0$ avremo un punto a tangente orizzontale.

Studiamo il segno della derivata, ricordando che l'esponenziale è sempre positivo

$$y"_2 \geq 0 \quad -2\ln x \geq 0 \quad x \leq 1 \ f \ \textit{sempre crescente}$$

Studiamo la derivata seconda

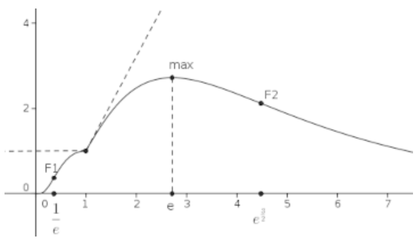
$$y"_2 \quad = \quad 2e^{-\ln^2 x + \ln x} \cdot \frac{2\ln^2 x + \ln x + 1}{x}$$

Avremo

$$\begin{array}{ccc} y_2" \geq 0 & 2\ln^2 x + \ln x + 1 & \begin{array}{c} x \geq e^{\frac{1}{2}} \ \textit{non accettabile} \\ x \leq e^{-1} \ \textit{accettabile} \end{array} \\ y"_1 \geq 0 & \begin{array}{c} 0 < x \leq e^{-1} \\ x \geq e^{-1} \end{array} & \begin{array}{c} f \ \textit{concava} \\ f \ \textit{convessa} \end{array} \end{array}$$

avremo quindi un flesso a tangente obliqua per $x = e^{-1}$.

Grafico: rappresentiamo graficamente la funzione data



Esercizio 64. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico

$$y = \sqrt{1 - \frac{4x - 8}{x^2 - 4x + 8}}$$

Soluzione. Riscriviamo la funzione, sommando i termini del radicando

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 4x + 8}} = \sqrt{\frac{(x-4)^2}{x^2 - 4x + 8}} = \frac{|x-4|}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$$

Campo di esistenza: il denominatore e radicando è sempre positivo $(\Delta < 0)$ per cui la funzione esiste $\forall x \in \mathbb{R}$.

Simmetrie: la funzione non è né pari né dispari.

Si può semplificare lo studio di questa funzione analizzando la funzione

$$y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}$$

ed eseguendo le opportune simmetrie delle sue parti negative.

Intersezioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Segno: risolviamo la disequazione

$$\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}} > 0$$

Essendo il denominatore sempre positivo, avremo

$$y > 0 \quad per \quad x > 4$$
$$y < 0 \quad per \quad x < 4$$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}} = \pm 1$$

avremo due asintoti orizzontali di equazione $y = 1$ e $y = -1$ e non vi sono asintoti obliqui.

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y' = \frac{\sqrt{x^2-4x+8}-(x-4)\frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x+8}}}{x^2-4x+8} = \frac{x^2-4x+8-4x^2+6x-8}{(x^2-4x+8)\sqrt{x^2-4x+8}} = \frac{2x}{(x^2-4x+8)\sqrt{x^2-4x+8}}$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione, ed essendo ancora il denominatore sempre positivo, avremo

$$y' > 0 \quad x > 0 \quad f.\,crescente$$
$$y' < 0 \quad x < 0 \quad f\;descrescente$$

Avremo pertanto un minimo nel punto $m\left(0; -\sqrt{2}\right)$.

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y" &= \frac{2\left(x^2-4x+8\right)\sqrt{x^2-4x+8}-2x\cdot\frac{6\left(x^2-4x+8\right)^2(x-2)}{2(x^2-4x+8)\sqrt{x^2-4x+8}}}{\left(x^2-4x+8\right)^3} = \\ &= \frac{2\left(x^2-4x+8\right)^2\left(2x^2-4x+8-3x^2+6x\right)}{\left(x^2-4x+8\right)^2\sqrt{(x^2-4x+8)}} = \frac{-4\left(x^2-x-4\right)}{\sqrt{\left(x^2-4x+8\right)^5}} \end{aligned}$$

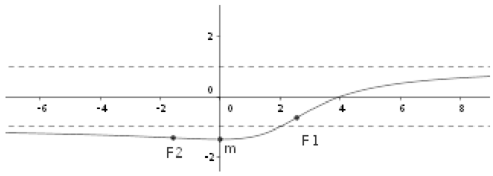
la derivata seconda ha lo stesso campo di esistenza della funzione e si annulla se

$$x^2-x-4 = 0 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

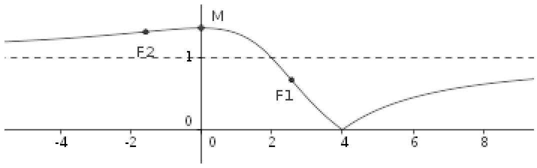
avremo due flessi in corrispondenza di questi valori di x; inoltre

$$y" > 0 \quad x < \tfrac{1-\sqrt{17}}{2} \vee x > \tfrac{1+\sqrt{17}}{2} \quad concavit\grave{a}\,verso\,alto$$
$$y" < 0 \quad \tfrac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \tfrac{1+\sqrt{17}}{2} \quad concavit\grave{a}\,verso\,basso$$

la funzione avrà quindi l'andamento in figura



Applichiamo ora il ribaltamento della parte negativa



Si può osservare che ora l'intersezione di ascissa $x=0$ è punto di massimo assoluto e che il punto $(4;0)$ è di minimo assoluto ed è un punto angoloso in quanto

$$\begin{aligned} y'_{-}(4) &= -\sqrt{2} \\ y'_{+}(4) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Esercizio 65. Tracciare il grafico della seguente funzione

$$y=\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{|x|}\right)+\ln\left(\frac{e^x+4e^{-|x|}}{5}\right)$$

e precisare il tipo di discontinuità della funzione nel punto di ascissa zero

Soluzione. Campo di Esistenza: l'argomento del logaritmo è sempre positivo, per cui basterà $x\neq 0$, cioè $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

Per la presenza del $|x|$ la funzione si divide in due parti

$$y=\begin{cases} \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{-x}\right)+\ln\left(\frac{e^x+4e^x}{5}\right)=-x^2+x+4 & x<0 \\ \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{x}\right)+\ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right)=\ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) & x>0 \end{cases}$$

Studiamo separatamente i due rami

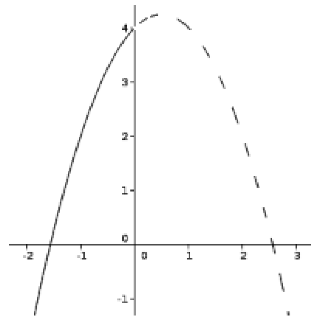
1°) $y=-x^2+x+4$ con $x<0$. La funzione si rappresenta osservando che essa rappresenta una parabola con concavità rivolta verso il basso, $V\left(\frac{1}{2};\frac{17}{4}\right)$ e può intersecare solo l'asse x nel punto ad ascissa negativa $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-}-x^2+x+4=4$$

e la sua derivata prima è

$$y'=-2x+1 \qquad y'\left(0^-\right)=1$$



2°) $y = \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right)$ con $x > 0$.
Intersezione asse y:

$$\begin{cases} \frac{e^x+4e^{-x}}{5} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad e^{x_1} = 1 (non\ accett)\ \ e^{x_2} = 4$$

$$B\left(2\ln 2; 0\right)$$

La funzione non presenta simmetria.
Segno:

$$\ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) > 0 \qquad e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$$

per cui

$$\begin{aligned} y > 0 \quad &per \quad x > 2\ln 2 \\ y < 0 \quad &per \quad 0 < x < 2\ln 2 \end{aligned}$$

Asintoti: Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) = \ln 1 = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) = +\infty$$

Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo, essendo verificata la condizione necessaria

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) = \frac{1}{x}\left[\ln\left(e^x + 4e^{-x}\right) - \ln 5\right] = \frac{1}{x} \cdot \left\{\ln\left[e^x\left(1 + \frac{4}{e^{2x}}\right)\right] - \ln 5\right\}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left[x + \ln\left(1 + \frac{4}{e^{2x}}\right) - \ln 5\right] = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{e^{2x}}\right)}{x} - \frac{\ln 5}{x} = 1$$

Pertanto

$$q = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) - x = x + \ln\left(1 + \frac{4}{e^{2x}}\right) - \ln 5 - x = -\ln 5$$

L'asintoto obliquo avrà equazione

$$y = x - \ln 5$$

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima, che è sempre definita

$$y' = \frac{5}{e^x + 4e^{-x}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(e^x - 4e^{-x}\right) = \frac{e^x - 4e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}}$$

La derivata prima si annulla se

$$e^x - 4e^{-x} = 0 \quad e^{2x} - 4 = 0 \quad x = \ln 2$$

studiamo il segno della derivata

$$y' > 0 \quad \frac{e^x-4e^{-x}}{e^x+4e^{-x}} > 0 \quad \begin{array}{ll} N>0 & x>\ln 2 \\ D>0 & \forall x \in C.E. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y'>0 & x>\ln 2 & f\, crescente \\ y'<0 & 0<x<\ln 2 & f\, decrescente \end{array}$$

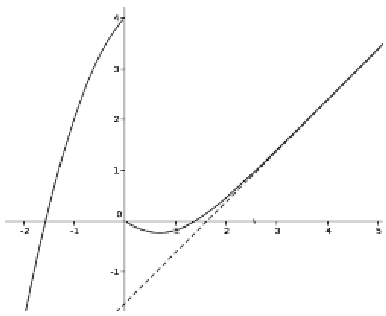
Avremo un punto di minimo nel punto $m\left(\ln 2; \ln\frac{4}{5} \simeq -0.223\right)$
FLESSI: studiamo la derivata seconda

$$y" = \frac{\left(e^x+4e^{-x}\right)^2 - \left(e^x-4e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+4e^{-x}\right)^2} = \frac{16}{\left(e^x+4e^{-x}\right)^2}$$

la derivata seconda è sempre positiva e la funzione avrà sempre, nell'intervallo $x > 0$, concavità rivolta verso l'alto.
Analizziamo la discontinuità nel punto di ascissa $x = 0$.

$$y'\left(0^+\right) = -\frac{3}{5}$$

Avremo quindi una discontinuità di prima specie non eliminabile, esistendo le derivate dx e sx ma avendo valore diverso.
GRAFICO:



Esercizio 66. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico $y = 3\sqrt[3]{x-1} + \ln\sqrt[3]{x}$

Soluzione. Campo di Esistenza: la radice cubica è sempre definita, mentre l'argomento del logaritmo deve essere positivo, per cui

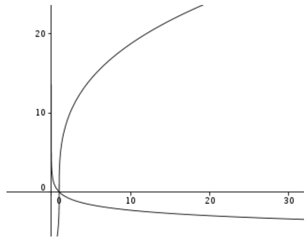
$$C.E.: x > 0$$

Segno: determiniamo il segno della funzione e gli eventuali punti di intersezione con l'asse x; non vi saranno intersezione con l'asse y per le C.E

$$3\sqrt[3]{x-1} + \ln\sqrt[3]{x} > 0 \qquad 3\sqrt[3]{x-1} + \frac{1}{3}\ln x > 0$$

$$9\sqrt[3]{x-1} > -\ln x > 0$$

risolviamo graficamente indicando con $y_1 = 9\sqrt[3]{x-1}$ e $y_2 = -\ln x$. La funzione y_1 è traslata verso destra di vettore $(1;0)$ ed è simmetrica rispetto a questo punto ed è inoltre dilatata verticalmente; la funzione y_2 è nota. La figura mostra le due funzioni



y_1 e y_2 si intersecano nel punto $(1;0)$ e dalla figura si ricava

$$\begin{array}{ll} y>0 & x>1 \\ y=0 & x=1 \\ y<0 & 0<x<1 \end{array}$$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi del C.E.

$$\lim_{x\to 0^+} 3\sqrt[3]{x-1}+\ln\sqrt[3]{x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} 3\sqrt[3]{x-1}+\ln\sqrt[3]{x}=+\infty$$

Avremo un asintoto verticale di equazione $x=0$. Verifichiamo la presenza di asintoto obliquo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\sqrt[3]{x-1}+\ln\sqrt[3]{x}}{x}=0$$

infatti x è un infinito di ordine superiore rispetto a $x^{\frac{1}{3}}$ e a $\ln x$. Non vi sono, pertanto asintoti obliqui.
Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima della funzione $y=3(x-1)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\ln x$

$$y'=3\cdot\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{1}{3x}$$

il campo di esistenza della derivata è $x\neq 0,1$
studiamo il segno della derivata

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{1}{3x}>0 \qquad \frac{3x+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{3x\sqrt[3]{(x-1)^2}}>0$$
$$\begin{array}{ll} N>0 & \forall x\in C.E. \\ D>0 & \forall x\in C.E.-\{1\} \end{array}$$

la derivata prima è sempre positiva nelle condizioni indicate e la funzione è sempre crescente. Studiamo il limite della derivata per x tendente a 1

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{1}{3x}=+\infty$$

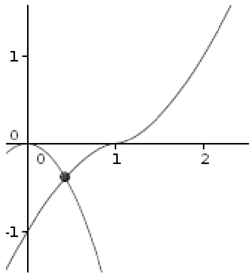
avremo quindi un punto a tangente verticale in $(1;0)$
Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$y"=-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{5}{3}}-\frac{1}{3x^2}$$

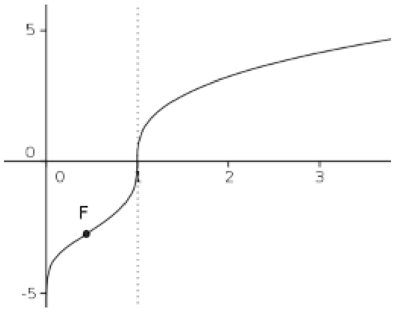
la derivata seconda ha lo stesso C.E della derivata prima e si annulla

$$-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{5}{3}}-\frac{1}{3x^2}=0 \qquad 2x^2+\sqrt[3]{(x-1)^5}=0$$

la soluzione algebrica presenta un'equazione di sesto grado. Cerchiamo la soluzione graficamente, disegnando la parabola $y_1=-2x^2$ e la $y_2=\sqrt[3]{(x-1)^5}$



Avremo quindi un flesso, nel nostro C.E., per $0 < x < 1$.
Grafico:



Esercizio 67. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot e^{x+1}$

Soluzione. Campo di esistenza: la funzione è definita su tutto l'insieme dei numeri reali $\forall \in \mathbb{R}$.

Intersezioni: determiniamo l'intersezione con gli assi cartesiani

$$asse\, x \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad asse\, y \begin{cases} x = 0 \\ y = e \end{cases}$$

Segno: risolviamo la disequazione $\sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot e^{x+1} > 0$

$$\begin{array}{lll} fat_1 > 0 & (x-1)^2 > 0 & x \neq 1 \\ fat_2 > 0 & e^{x+1} > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

la funzione è quindi sempre positiva; $y > 0\ \forall x \neq 1$.
Asintoti: calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot e^{x+1} = \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{e^{-(x+1)}} \overset{Hop}{=} \frac{2e^{x+1}}{-3\sqrt[3]{x-1}} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot e^{x+1} = +\infty$$

avremo un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$; non vi sono asintoti verticali né obliqui.
Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} e^{x+1} + (x-1)^{\frac{2}{3}} e^{x+1} \quad = \quad e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right)$$

Il C.E della derivata è $x \neq 1$. Calcoliamo quindi i limiti destro e sinistro della derivata

$$\lim_{x\to 1^-} e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right) = \frac{2e^2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right) = \frac{2e^2}{0^+} = +\infty$$

il punto di ascissa $x = 1$ sarà una cuspide essendo i limiti non finiti e di segno opposto. Studiamo il segno della derivata $y' > 0$

$$\begin{array}{rl} e^{x+1} > 0 & \forall x \\ 3x-1 > 0 & x > \frac{1}{3} \\ x-1 > 0 & x > 1 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{lcl} y' > 0 & x > \frac{1}{3} \vee x > 1 & f\ crescente \\ y' = 0 & x = \frac{1}{3} & max \\ y' < 0 & \frac{1}{3} < x < 1 & f\ decrescente \end{array}$$

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y" &= \frac{3\left[e^{x+1}(3x-1)+3e^{x+1}\right]\sqrt[3]{x-1} - e^{x+1}\frac{(3x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}}{9\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= \frac{3e^{x+1}(3x+2)(x-1) - e^{x+1}(3x-1)}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{e^{x+1}(9x^2-6x-5)}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} \end{aligned}$$

la derivata seconda si annulla per

$$9x^2 - 6x - 5 = 0 \qquad x = 1 \pm \sqrt{6}$$

in questi due punti avremo due flessi.
Grafico: